به نام یزدان پاک

همه سوال‌های

دکترای آمار
احتمال(۱ و ۲)

۱۴۰۲–۱۳۹۱

تالیف و تدوین
ستار خالویی

سرشناسه	:	خالویی، ستار
عنوان و پدیدآور	:	همه سوال‌های دکترای آمار – احتمال ۱و ۲. تالیف و تدوین: ستار خالویی
مشخصات نشر	:	تهران: پردازش ۱۴۰۲
مشخصات ظاهری	:	۱۵۶ص.
شابک	:	۳-۹۰۷-۲۳۳-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپا
موضوع	:	دانشگاهها و مدارس عالی -- ایران -- آزمون‌ها
موضوع	:	آمار – آمار ریاضی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
موضوع	:	آزمون و دوره‌های تحصیلات تکمیلی -- ایران
رده‌بندی کنگره	:	۲۷ م ۲۳۵ س/ LB۲۳۵۳
رده‌بندی دیویی	:	۳۷۸/۱۶۶۴
شماره کتابخانه ملی	:	۴۱۵۰۵-۸۵ م

همه سوال‌های دکترای آمار – احتمال ۱و ۲

تالیف و تدوین	:	ستار خالویی
ناشر	:	پردازش
چاپ اول	:	۱۴۰۲
تیراژ	:	۱۰۰
حروفچینی	:	پردازش
چاپ و صحافی	:	پردازش
قیمت	:	۴۵۰،۰۰۰تومان

نشر پردازش

تهران: میدان انقلاب، خیابان فروردین، خیابان شهدای ژاندارمری، روبه‌روی اداره پست، پلاک ۱۳۲و۱۳۰

ساختمان پردازش

تلفن : ۶۶۹۷۵۵۶۶ (صد خط) دورنگار: ۶۶۴۰۷۴۰۸

www.Pardazesh.org

www.Pardazeshpub.com

سایت برتر کشور در چهارمین و پنجمین همایش ملی تجارت الکترونیک

فهرست مطالب

آمار ۱۳۹۱

آمار و احتمال ۱ و ۲

۱. فرض کنید، احتمال از بین رفتن نام‌خانوادگی یک خانواده بعد از نسل **n**ام برابر با $e^{-\frac{۲n^۲}{۴n^۲+۱}}$ باشد. احتمال بقای نام‌خانوادگی در این خانواده برای همیشه کدام است؟

۱) $e^{-\frac{۱}{۲}}$ ۲) $e^{-۲}$ ۳) صفر ۴) $۱-e^{-\frac{۱}{۲}}$

۲. تعداد متولدین در روز در بیمارستان یک شهر کوچک دارای توزیع زیر است:

تعداد متولدین	۰	۱	۲	۳	۴
احتمال	۰/۲۵	۰/۴۵	۰/۱۴	۰/۱۱	۰/۰۵

احتمال تولد نوزاد دختر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. اگر بدانیم در همان روز دقیقا دو دختر متولد شده است، محتمل‌ترین تعداد برای تولد در یک روز کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

۳. اگر $X \sim U(۰,۱)$، توزیع $Y = [nX]$ کدام است؟ ($[x]$ = جزء صحیح x)

۱) $Ge(\frac{۱}{۲})$ ۲) $B(n,\frac{۱}{۲})$

۳) $B(n-۱,\frac{۱}{۲})$ ۴) $DU(\{۰,۱,...,n-۱\})$

۴. سه نقطه تصادفی $A=(X_۱,Y_۱)$، $B=(-X_۱,-Y_۱)$ و $C=(X_۲,Y_۲)$ از $R^۲$ را در نظر بگیرید که در آن $X_۱,X_۲,Y_۱,Y_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $N(۰,۱)$ هستند. احتمال اینکه نقطه **C** داخل دایره با قطر $|\overline{AB}|$ قرار گیرد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۵. اگر **X** یک متغیر تصادفی با تابع توزیع $F(x)$، $g:[۰,۱]\to[۰,۱]$ یک تابع محدب با $g(۰)=۰$ و $g(۱)=۱$ باشد، گزینه صحیح کدام است؟

۱) $F(\frac{g(x)}{۲}) \le F(g(\frac{x}{۲}))$ ۲) $F(x) \le g(F(x))$

۳) $g(F(x)) \le F(x)$ ۴) $g(F(x)) \le ۲g(\frac{F(x)+۱}{۲})-۱$

۶. فرض کنید $X_۱,X_۲$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(۰,\sigma^۲)$ باشد. مقدار $P((X_۱+X_۲)^۲+(X_۱-X_۲)^۲ > ۲\sigma^۲)$ کدام است؟

۱) $e^{-۲}$ ۲) $e^{-\frac{۱}{۲}}-e^{-۱}$ ۳) $e^{-۱}-e^{-۲}$ ۴) $e^{-\frac{۱}{۲}}$

۷. فرض کنید X_1, X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با تابع توزیع یکسان $N(0,\sigma^2)$ باشند. تابع توزیع $W = \max\{|X-Y|, |X+Y|\}$ برای هر $w > 0$، کدام است؟ (Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است)

۱) $(1-2\Phi(\frac{w}{\sigma\sqrt{2}}))^2$ ۲) $(2\Phi(\frac{w}{\sigma\sqrt{2}}))^2$ ۳) $\sqrt{1-2\Phi(\frac{w}{\sigma\sqrt{2}})}$ ۴) $\sqrt{2\Phi(\frac{w}{\sigma\sqrt{2}})}$

۸. فرض کنید $X \sim E(\lambda)$ و $Y \sim E(\mu)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. اگر $V = \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\}$، برای هر $v > 0$، مقدار $P(V > v)$ کدام است؟

۱) $e^{-(\lambda+\mu)\upsilon}$ ۲) $\frac{\mu e^{-\lambda\upsilon} + \lambda e^{-\mu\upsilon}}{\lambda+\mu}$ ۳) $\frac{\lambda e^{-\lambda\upsilon} + \mu e^{-\mu\upsilon}}{\lambda+\mu}$ ۴) $\frac{e^{-(\lambda+\mu)\upsilon}}{\lambda+\mu}$

۹. تعداد تصادفات یک خودرو در هر سال دارای توزیع پواسون با میانگین λ و طول عمر خودرو یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\mu}$ است. توزیع تعداد کل تصادفات در طول عمر ماشین کدام است؟

۱) $P(\frac{\lambda}{\mu})$ ۲) $Ge(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})$ ۳) $Ge(\frac{\mu}{\lambda+\mu})$ ۴) $P(\lambda\mu)$

۱۰. فرض کنید $\{X_r, r \geq 0\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان باشند. اگر $M = \min\{n \geq 1; X_0 \geq X_1 \geq \ldots \geq X_{n-1} < X_n\}$ مقدار $P(M = m)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{m!}$ ۲) $\frac{m+1}{m!}$ ۳) $\frac{m}{(m+1)!}$ ۴) $\frac{1}{(m+1)!}$

۱۱. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای دلخواه با میانگین μ باشند، مقدار $E(X_1 \mid \sum_{i=1}^{n} X_i)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{n}$ ۲) s^2 ۳) $\bar{X}$ ۴) n

۱۲. فرض کنید $X \sim U(0,1)$ و $Y \mid X = x \sim U(x, x+1)$ باشد. مقدار $Var(X+Y)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{5}{12}$ ۴) $\frac{2}{12}$

۱۳. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0,1)$ باشد. اگر $D_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$، $R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{2i-1}}{X_{2i}}$ و $T_n = \frac{R_n}{D_n}$، توزیع حدی T_n کدام است؟

۱) کوشی استاندارد ۲) یکنواخت روی فاصله $(-1,1)$
۳) نمایی با پارامتریک ۴) نرمال استاندارد

۱۴. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $B(20, \frac{1}{2})$ باشد. توزیع حدی $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 10)^2$ کدام است؟

۱) $N(0,1)$ ۲) نمایی ۳) $N(5,1)$ ۴) تباهیده در ۵-

۱۵. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان مطلقا پیوسته **F** باشند. اگر $X_{(1)} = \min\{X_1, X_n\}$ و $Y_n = nF(X_{(1)})$ باشند، توزیع حدی Y_n کدام است؟

۱) $E(1)$ ۲) $E(2)$ ۳) $\chi^2_{(4)}$ ۴) $N(0,1)$

۱۶. **فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی پیوسته و اکیدا صعودی $F(x)$ با میانگین μ باشد. اگر متغیرهای تصادفی Y_i به صورت زیر تعریف شوند،**

$$Y_i=\begin{cases}2 & \text{if } X_i>\mu \\ 1 & \text{if } X_i\le\mu\end{cases},i=1,...,n$$

MLE پارامتر μ کدام است؟

۱) $\bar{Y}-1$ ۲) $F^{-1}(2-\bar{Y})$ ۳) $F^{-1}(\bar{Y}-1)$ ۴) $1-F(\bar{Y})$

۱۷. **فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد:**

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\theta & \text{if } x=-1 \\ (1-\theta)^2\theta^x & \text{if } x=0,1,2,...\end{cases},0<\theta<1$$

اگر r_n نسبت اعضایی از نمونه باشد که مساوی ۱- هستند، برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) پارامتر θ کدام است؟

۱) $\bar{X}+r_n$ ۲) $\frac{\bar{X}}{r_n}$

۳) $\frac{\bar{X}+r_n}{2n}$ ۴) $\frac{\bar{X}+2r_n}{\bar{X}+2}$

۱۸. **فرض کنید ۲،۲/۱،۱ یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد، که در آن $\theta\in\{1,2\}$، برآورد گشتاوری θ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۱/۴ ۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

۱۹. **فرض کنید $X_{j+1}=\theta X_j+\varepsilon_{j+1}$، $j=1,...,n-1$ که در آن $\varepsilon_j \text{iid} N(0,1)$، $j=1,...,n-1$ و $X_1\sim N(0,\frac{1}{1-\theta^2})$ است. آماره بسنده برای θ کدام است؟**

۱) $(\sum_{j=1}^{n-1}X_jX_{j+1},\sum_{j=1}^{n}X_j^2)$ ۲) $(X_1^2,\sum_{j=1}^{n-1}X_jX_{j+1},\sum_{j=2}^{n-1}X_j^2)$

۳) $(\sum_{j=1}^{n-1}X_jX_{j+1},\sum_{j=2}^{n-1}X_j^2)$ ۴) $(X_1^2,\sum_{j=1}^{n-1}X_jX_{j+1},\sum_{j=2}^{n}X_j^2)$

۲۰. **فرض کنید ۲،۴،۱،۳،۸ یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ باشد. برآورد نااریب با کمترین واریانس برای تابع توزیع تجمعی در نقطه ۳، یعنی $F_\theta(3)$، کدام است؟**

۱) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^5$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $1-e^{-\frac{5}{6}}$ ۴) $\left(\frac{5}{6}\right)^5$

۲۱. **فرض کنید $X_1,...,X_n,X_{n+1}$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر θ باشد. اگر $n=6$ و $\sum_{i=1}^{7}x_i=3$، بهترین برآورد نااریب برای $P_\theta(\sum_{i=1}^{n}X_i>X_{n+1})$ کدام است؟**

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۲. فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(0,1)$ باشد و Z_i ها به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$Z_i=\begin{cases} X_i & w.p.\theta \\ -X_i & w.p.(1-\theta)\end{cases},\ 0<\theta<1$$

اگر P نمایانگر تعداد Z_i های مثبت باشد، برآوردگر UMVU پارامتر θ کدام است؟

۱) $\bar{z}$
۲) $\frac{P}{n}\bar{z}+(1-\frac{P}{n})\bar{x}$
۳) $\bar{z}\,\bar{x}$
۴) $\frac{P}{n}$

۲۳. فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد، اگر $\bar{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$، مقدار $E(\bar{X}^2\mid\bar{X})$ کدام است؟

۱) θ^2
۲) $\bar{X}^2+\frac{n-1}{n}$
۳) $1+\theta^2$
۴) $\bar{X}^2$

۲۴. فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد

x	0	1	2
$f_\theta(x)$	θ	3θ	$1-4\theta$

$,0<\theta<\frac{1}{4}$

کدام‌یک از توابع پارامتری زیر دارای برآوردگر UMVU است؟

۱) θ
۲) $(1-\theta)^2$
۳) $\theta(1-\theta)$
۴) θ^2

۲۵. فرض کنید X دارای توزیع پواسون با میانگین λ باشد. برآوردگر UMVU پارامتر $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1+X}$
۲) Xe^{-X}
۳) $\frac{1+X}{X}$
۴) $\frac{X}{1+X}$

۱. گزینه ۴)

احتمال از بین رفتن $\Leftarrow e^{-\frac{2n^2}{4n^2+1}} \Leftarrow$ احتمال بقا $\Leftarrow 1-e^{\frac{-2n^2}{4n^2+1}}$

برای همیشه $1-e^{-\frac{1}{2}} \leftarrow n \to \infty$

۲. گزینه ۱)

$$P(G)=\frac{1}{2} \qquad P(\text{birth} \mid \text{birth girl}=2)=\frac{P(\text{birth}, \text{birth girl}=2)}{P(\text{birth girl}=2)}-17$$

احتمال صفر $\text{birth}=1$ و احتمال صفر $\text{birth}=0 \Rightarrow$

$$\text{birth}=2 \Rightarrow \frac{P(\text{birth girl}=2 \mid \text{birth}=2)P(\text{birth}=2)}{P(\text{birth girl}=2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\times 0/14+0}{\frac{1}{4}\times 0/14+\frac{1}{8}\binom{3}{2}0/11+\frac{1}{16}\binom{3}{2}0/05}=\frac{0/14}{0/14+0/165+0/075}$$

در حالت ۳ تولد بیشترین احتمال وجود دارد.

$$\text{birth}=3 \Rightarrow \frac{0/165}{0/14+0/165+0/075} \Rightarrow$$

$$\text{birth}=4 \Rightarrow \frac{0/075}{0/14+0/165+0/075}$$

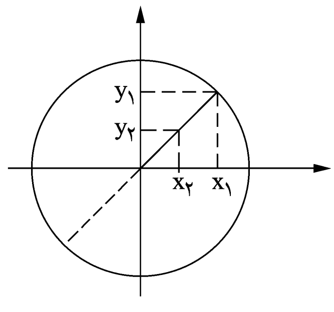
۳. گزینه ۴)

$$P(Y=y)=P([nX]=y)=P(y \le nX < y+1)=\int_{\frac{y}{n}}^{\frac{y+1}{n}} 1\, dx=\frac{1}{n}-18$$

۴. گزینه ۲)

برای اینکه داخل باشد باید شرط روبه‌رو را داشته باشیم:

(فیثاغورث) $x_1^2+y_1^2 \ge x_2^2+y_2^2$



$$\Rightarrow P(x_1^2+y_1^2 \ge x_2+y_2^2)=P=P(F \ge 1)\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{x_2^2+y_2^2} \ge 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2+y_1^2 \sim \chi^2_{(2)} \\ x_2^2+y_2^2 \sim \chi^2_{(2)} \end{array}\right\} \text{ind} \Rightarrow \frac{x_1^2+y_1^2}{x_2^2+y_2^2} \sim F(2,2)$$

نکته: اگر درجه آزادی‌ها یکسان باشد و نسبت نقطه یک احتمال فوق را محاسبه کنیم این احتمال ۰/۵ است.

۵. گزینه ۳)

$$g(F(x)z+(1-F(x))w) \le F(x)g(z)+(1-F(x))g(w)$$
$$\text{if } z=1 \text{ and } w=0 \le F(x) \Rightarrow g(F(x)) \le F(x)$$

۶. گزینه ۴)

$$X_1, X_2 \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow X_1+X_2 \perp X_1-X_2 \Rightarrow (X_1+X_2)^2 \perp (X_1-X_2)^2$$

در نرمال استقلال را نتیجه می‌دهد.

$$\operatorname{cov}(X_1+X_2, X_1-X_2) = \operatorname{var}(X_1)-\operatorname{var}(X_2) = \sigma^2-\sigma^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \frac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2} + \frac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2} \sim E(2) \quad f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}f}$$

$$\Rightarrow P(f>1) = \int_1^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}f}\,df = e^{-\frac{1}{2}}$$

۷. گزینه ۱)

$$P(W<w) = P(\max\{|X-Y|,|X+Y|\}<w)$$

$$= P(|X-Y|<w, |X+Y|<w) \overset{?}{=} P(|X-Y|<w)P(|X+Y|<w)$$

$$= P(-w<X-Y<w)P(-w<X+Y<w)$$

$$= P\left(\frac{-w}{\sigma\sqrt{2}}<Z<\frac{-w}{\sigma\sqrt{2}}\right)P\left(\frac{-w}{\sigma\sqrt{2}}<Z<\frac{w}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

$$= P\left(|Z|<\frac{w}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2 = \left(1-P\left(|Z|>\frac{w}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)^2$$

$$= \left(1-2P\left(Z>\frac{w}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)^2$$

یا $\left(1-2\Phi\left(-\frac{w}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)^2$

۸. گزینه ۲)

$$\max\{(X,Y)\} - \min(X,Y) = |X-Y|$$

$$P(V>v) = P(|X-Y|>v) =$$

$$V = |X-Y| \qquad P(V<v) = P(|X-Y|<v) = P(-v<X-Y<v) = \int_0^\infty \int_{\max(0,y-v)}^{v+y} \lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}\,dx\,dy$$

$$\int_0^v\int_0^{v+y} + \int_v^\infty\int_{y-v}^{v+y} = \int_0^v (1-e^{-\lambda(v+y)})\mu e^{-\mu y}dy + \int_v^\infty (e^{-\lambda(y-v)}-e^{-\lambda(v+y)})\mu e^{-\mu y}dy$$

$$= 1-e^{\mu v} - \frac{e^{-\lambda v}\mu}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)v}) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(e^{-\lambda\mu}-e^{\lambda v}(e^{-(\lambda+\mu)v}) = 1-\frac{\mu e^{-\lambda v}+\lambda e^{-\mu v}}{\lambda+\mu}$$

۹. گزینه ۱)

تعداد کل تصادفات در طول عمر ماشین از رابطهٔ زیر پیروی می‌کند:

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

که در آن X_i طول عمر خودرو i و N تعداد تصادفات در سال باشند. بنابراین:

$$E(Y) = E(N)E(X_i) = \frac{\lambda}{u}$$

از طرفی توزیع پواسون و نمایی با یکدیگر ارتباط نزدیک دارند، بنابراین توزیع تعداد تصادفات در طول عمر خودرو، پواسون بـا پـارامتر $\frac{\lambda}{u}$ می‌باشد.

۱۰. گزینه ۳)

برای حالت اول یک انتخاب داریم، برای دومین یکی از دو حالت را بر می‌گزینیم و الی $m-1$ و برای m امین کافی است از یکی از مابقی آنها بزرگ‌تر باشد.

$$\frac{1}{1}.\frac{1}{2}....\frac{1}{m}.\frac{m}{m+1}=(\frac{m}{(m+1)!})$$

۱۱. گزینه ۳)

در حالت خاص فرض کنیم نمونه از جامعه نرمال است.

به دلیل اینکه $\sum X_i$ در این نمونه آماره کامل می‌باشد و X_1 یک برآوردگر نااریب از μ می‌باشد، پس باتوجه به قضیه رائو ـ بلکول ـ لهمن شفه جواب $\bar{X}$ می‌باشد (UMVUE).

۱۲. گزینه ۳)

$$Var(X+Y)=Var(X)+var(Y)+2cov(X+Y)$$

$$\frac{1}{12}+Var(E(Y|X))+E(Var(Y|X))+2(E(XY)-E(X)E(Y))$$

$$-\frac{1}{12}+Var(X+\frac{1}{12})+E(\frac{1}{12})+2(E(E(XY|X))-E(X)E(E(Y|X)))$$

$$-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+2(E(x(x+\frac{1}{2})))-E(X)E(X+\frac{1}{2}))$$

$$=\frac{3}{12}+2(\frac{7}{12}-\frac{1}{12})=\frac{5}{12}$$

۱۳. گزینه ۱)

$$\frac{R_n}{D_n}=\frac{\frac{R_n}{n}}{\frac{D_n}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{R_n}{n}\xrightarrow{D}cauchy(0,1)\\ \frac{D_n}{n}\xrightarrow{P}1\end{array}\right\}\Rightarrow cauchy(0,1)$$

۱۴. گزینه ۴)

$$E(var)=\frac{1}{n}\sum E(X_i-10)^2=\frac{1}{n}\sum var(X_i)=\frac{1}{n}\times n\times 5=5$$

با توجه به همگرایی در احتمال، توزیع آن تباهیده در ۵ می‌باشد.

۱۵. گزینه ۱)

$$F(x)\to \text{یکنواخت} \xrightarrow[F]{\text{با توجه به صعودی بودن}} F(X_{(1)})\sim B(1,n)$$

$$P(Y_n<y)=P(nF(X_{(1)})<y)=P(F(X_{(1)})<\frac{y}{n})=1-(\frac{1-y}{n})^n$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{y}{n})^n=e^{-y}\Rightarrow 1-e^{-y}\Rightarrow$$ توزیع نمایی

۱۶. گزینه ۲)

توزیع برنولی با $P=۱-F(\mu)$

$$Z_i = Y_i - ۱ = \begin{cases} ۱ & X_i > \mu \\ ۰ & X_i \le \mu \end{cases}$$

در توزیع برنولی MLE پارامتر P برابر است با میانگین مشاهدات $\quad ۱-F(\hat{\mu}) \;=\!=\!=\; \hat{F}(\mu) \overset{۱-}{=} \hat{P} \qquad \Rightarrow \hat{P} = \bar{Z} \underset{\text{قضیه ذهنا}}{=} \bar{Y} - ۱$

$$\Rightarrow ۱-F(\hat{\mu}) = \bar{Y} - ۱ \Rightarrow \hat{\mu} = F^{-۱}(۲-\bar{Y})$$

۱۷. گزینه ۴)

$$f_\theta(x_i) = \theta^{c(x_i+۱)}((۱-\theta)^۲\theta^{x_i})^{u(x_i)}$$

که $c(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۰ \\ ۰ & x \ne ۰ \end{cases}$ و $u(x) = \begin{cases} ۱ & x \ge ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$ در این مسئله داریم: $\quad x_i = x_i u(x_i) + x_i c(x_i+۱)$

$$= x_i u(x_i) - c(x_i+۱)$$

$$۱ = u(x_i) + c(x_i+۱)$$

$$L(\theta) = \theta^{\sum c(x_i+۱)}(۱-\theta)^{۲\sum u(x_i)}.\theta^{\sum x_i u(x_i)}$$

$$\ln(\theta) = \ln(\theta)\sum c(x_i+۱) + ۲\ln(۱-\theta)\sum u(x_i) + \ln(\theta)\sum x_i u(x_i)$$

$$= \ln(\theta)(\sum (c(x_i+۱) + x_i u(x_i)) + ۲\ln(۱-\theta)\sum u(x_i)$$

$$= \ln\theta(\sum(۲c(x_i+۱) + x_i) + ۲\ln(۱-\theta)\sum(۱-c(x_i+۱))$$

$$= ۲\sum c(x_i+۱)(\ln(\theta) - \ln(۱-\theta) + \ln(\theta)n\bar{X} + ۲n\ln(۱-\theta)$$

$$\frac{\partial \ln(\theta)}{\partial\theta} = ۲\sum c(x_i+۱)(\frac{۱}{\theta} + \frac{۱}{۱-\theta}) + \frac{n\bar{X}}{\theta} - \frac{۲n}{۱-\theta} = ۰$$

$$۲\sum c(x_i+۱)\frac{۱}{\cancel{\theta(۱-\theta)}} = \frac{۲n\theta - n\bar{X}(۱-\theta)}{\cancel{\theta(۱-\theta)}}$$

$$۲\sum c(x_i+۱) = ۲n\theta - n\bar{X} + n\bar{X}\theta = n\theta(\bar{X}+۲) - n\bar{X}$$

$$۲\sum c(x_i+۱) + n\bar{X} = n\theta(\bar{X}+۲) \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{۲r_n + \bar{X}}{\bar{X}+۲}$$

۱۸. گزینه ۴)

$$E(X) = \hat{\theta} = \frac{۱ + ۱.۲ + ۲}{۳} = ۱.٤$$

۱۹. گزینه ۳)

$$\underset{\sim}{f(\varepsilon)} = \sum_{j=۱}^{n-۱} f(\varepsilon_j) = \sum_{j=۱}^{n-۱} \frac{۱}{\sqrt{۲n}} e^{-\frac{۱}{۲}\varepsilon_j^۲} = (\frac{۱}{\sqrt{۲n}})^n e^{-\frac{۱}{۲}\sum\varepsilon_j^۲}$$

$$\Rightarrow f_{X_۱}(X_۱).\underset{\sim}{f(\varepsilon)} = \frac{۱}{\sqrt{۲n\frac{۱}{۱-\theta^۲}}} e^{-\frac{(۱-\theta^۲)X_۱}{۲}} \frac{۱}{\sqrt{۲n}} e^{-\frac{۱}{۲}\sum(X_{j+۱} - \theta X_j)^۲}$$

$$\alpha = e^{\frac{+\theta^۲ X_۱^۲}{۲}}.e^{-\frac{۱}{۲}\sum(X_j + ۱^۲ + \theta^۲ X_j^۲ - ۲\theta X_j X_{j+۱})}$$

$$\alpha = e^{-\frac{۱}{۲}\sum_{j=۲}^{n-۱}\theta^۲ X_j^۲ + \theta\sum_{j=۱}^{n-۱}\theta^۲ x_j x_{j+۱}}$$

۲۰. گزینه ۱)

در توزیع نمایی آماره کامل $\sum X_i \to$ $\quad P(X_۱<۳|\sum X_i)=P\left(\frac{X_۱}{\sum X_i}<\frac{۳}{۱۸}\right)=P\left(Z<\frac{۱}{۶}\right)$ قضیه باسو و R-B-L-S

$$=۱-\left(۱-\frac{۱}{۶}\right)^{۵}=۱-\left(\frac{۵}{۶}\right)^{۵}$$

$Z\sim Beta(۱,۵)$

۲۱. گزینه ۲)

$$UMVUE\Rightarrow P(\sum_{i=۱}^{n}X_i>X_{n+۱}\Big|\sum_{i=۱}^{۷}X_i=۳)\Leftarrow \text{آمار بسنده کامل } \sum_{i=۱}^{۷}X_i$$

$$=P(\sum_{i=۱}^{۷}X_i>۲X_{n+۱}\Big|\sum X_i=۳)=P(۳>۲X_{n+۱}\Big|\sum X_i=۳)$$

$$=P(X_{n+۱}<\frac{۳}{۲}\Big|\sum X_i=۳)\sim HG(۷,۱,۳)$$

$$=P(X_{n+۱}=۰\Big|\sum X_i=۳)+P(X_{n+۱}=۱\Big|\sum X_i=۳)=۱$$

۲۲. گزینه ۴)

فرض کنیم g دارای توزیع برنولی با پارامتر P باشد آنگاه در یک نمونه تصادفی به اندازه n، $\bar{g}$UMVUE پارامتر P است. حال متغیر روبه‌رو را تعریف می‌کنیم:

$$P_i=u(Z_i)=\begin{cases}۱ & Z_i\geq ۰\\ ۰ & Z_i<۰\end{cases}\qquad\Rightarrow P=\sum P_i$$

$$P_\theta(\underset{\sim}{Z}).\quad \underbrace{\theta^{\sum P_i}(۱-\theta)^{n-\sum P_i}}_{\text{شبیه توزیع برنولی است}}\quad\Rightarrow\quad \underset{\text{UMVUE}}{\underset{\downarrow}{\hat{\theta}}}=\bar{P}=\frac{P}{n}$$

۲۳. گزینه ۲)

$$E(\bar{X}^۲\,|\,\bar{X})=E(\bar{X}^۲-\bar{X}^۲+\bar{X}^۲\,|\,X)=E(\frac{n-۱}{n}S^۲+\bar{X}^۲\,|\,X)$$

$$E(\frac{n-۱}{n}S^۲\,|\,\bar{X})+E(\bar{X}^۲\,|\,\bar{X})=\frac{n-۱}{n}+\bar{X}$$

قضیه باسو $\quad \frac{n-۱}{n}E(S^۲)$

۲۴. گزینه ۱)

دنبال برآوردگر صفر می‌گردیم: $\quad E(g(x))=g(۰)\theta+۳\theta g(۱)+(۱-۴\theta)g(۲)=۰$

$$\Rightarrow g(۲)=۰\qquad g(۰)=-۳g(۱)\qquad\Rightarrow g(x)=\begin{cases}-۳a & x=۰\\ a & x=۱\\ ۰ & x=۳\end{cases}$$

فرض کنیم u(x) • UMVU پارامتر مورد نظر باشد آنگاه طبق قضیه ۶-۱ (لهمن ـ شفه) $\quad E(u(x)g(x))=۰$

$$\Rightarrow u(۰)=u(۱)\Rightarrow u(x)=\begin{cases}d & x=۰\\ a & x=۱\\ c & x=۲\end{cases}\qquad\qquad \Rightarrow -۳u(۰)a\theta+۳a\theta u(۱)+u(۲)\,,\,(\bar{۲})(۱-۴\theta)=۰$$

پس برآوردگر UMVU است. اگر $c=۰$ و $d=\frac{۱}{۴}$ باشد، جواب به‌دست می‌آید: $\quad E(u(x))=۴\theta(d-c)+c$