به نام یزدان پاک

همه سوال‌های

دکترای آمار
احتمال(۱ و ۲)

۱۴۰۴-۱۳۹۱

تالیف و تدوین
ستار خالویی

فهرست مطالب

پیش گفتار ۵

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۳۹۱
احتمال ۱ و ۲ .... ۷
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۱۱

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۳۹۲
احتمال ۱ و ۲ .... ۱۷
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۲۱

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۳۹۳
احتمال ۱ و ۲ .... ۲۶
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۳۰

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۳۹۴
احتمال ۱ و ۲ .... ۳۹
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۴۳

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۳۹۵
احتمال ۱ و ۲ .... ۴۹
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۵۴

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۳۹۶
احتمال ۱ و ۲ .... ۶۳
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۶۷

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۳۹۷
احتمال ۱ و ۲ .... ۷۱
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۷۵

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۳۹۸
احتمال ۱ و ۲ .... ۸۰
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۸۴

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۳۹۹
احتمال ۱ و ۲ .... ۹۰
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۹۳

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۴۰۰
احتمال ۱ و ۲ .... ۱۰۰
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۱۰۵

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۴۰۱
احتمال ۱ و ۲ .... ۱۱۲
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۱۱۶

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۴۰۲
احتمال ۱ و ۲ .... ۱۲۱
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۱۲۶

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۴۰۳
احتمال ۱ و ۲ .... ۱۳۱
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۱۳۴

آزمون دکترای تخصصی آمار ۱۴۰۴
احتمال ۱ و ۲ .... ۱۵۰
پاسخ‌نامه احتمال ۱ و ۲ .... ۱۵۳
منابع ۱۶۷

آمار ۱۳۹۱

آمار و احتمال ۱ و ۲

۱. فرض کنید، احتمال از بین رفتن نام‌خانوادگی یک خانواده بعد از نسل nام برابر با $e^{-\frac{۲n^۲}{۴n^۲+۱}}$ باشد. احتمال بقای نام‌خانوادگی در این خانواده برای همیشه کدام است؟

۱) $e^{-\frac{۱}{۲}}$ ۲) $e^{-۲}$ ۳) صفر ۴) $۱-e^{-\frac{۱}{۲}}$

۲. تعداد متولدین در روز در بیمارستان یک شهر کوچک دارای توزیع زیر است:

تعداد متولدین	۰	۱	۲	۳	۴
احتمال	۰/۲۵	۰/۴۵	۰/۱۴	۰/۱۱	۰/۰۵

احتمال تولد نوزاد دختر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. اگر بدانیم در همان روز دقیقا دو دختر متولد شده است، محتمل‌ترین تعداد برای تولد در یک روز کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

۳. اگر $X \sim U(۰,۱)$، توزیع $Y=[nX]$ کدام است؟ ($[x]$ = جزء صحیح x)

۱) $Ge(\frac{۱}{۲})$ ۲) $B(n,\frac{۱}{۲})$

۳) $B(n-۱,\frac{۱}{۲})$ ۴) $DU(\{۰,۱,...,n-۱\})$

۴. سه نقطه تصادفی $A=(X_۱,Y_۱)$، $B=(-X_۱,-Y_۱)$ و $C=(X_۲,Y_۲)$ از $R^۲$ را در نظر بگیرید که در آن $X_۱,X_۲,Y_۱,Y_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $N(۰,۱)$ هستند. احتمال اینکه نقطه C داخل دایره با قطر $|\overline{AB}|$ قرار گیرد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۵. اگر X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع $F(x)$، $g:[۰,۱]\to[۰,۱]$ یک تابع محدب با $g(۰)=۰$ و $g(۱)=۱$ باشد، گزینه صحیح کدام است؟

۱) $F(\frac{g(x)}{۲}) \le F(g(\frac{x}{۲}))$ ۲) $F(x) \le g(F(x))$

۳) $g(F(x)) \le F(x)$ ۴) $g(F(x)) \le ۲g(\frac{F(x)+۱}{۲})-۱$

۶. فرض کنید $X_۱,X_۲$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(۰,\sigma^۲)$ باشد. مقدار $P((X_۱+X_۲)^۲+(X_۱-X_۲)^۲ > ۲\sigma^۲)$ کدام است؟

۱) $e^{-۲}$ ۲) $e^{-\frac{۱}{۲}}-e^{-۱}$ ۳) $e^{-۱}-e^{-۲}$ ۴) $e^{-\frac{۱}{۲}}$

۷. فرض کنید $X_۱, X_۲$ دو متغیر تصادفی مستقل با تابع توزیع یکسان $N(۰,\sigma^۲)$ باشند. تابع توزیع $W = \max\{|X-Y|,|X+Y|\}$ برای هر $w > ۰$، کدام است؟ (Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است)

۱) $(۱-۲\Phi(\frac{w}{\sigma\sqrt{۲}}))^۲$ ۲) $(۲\Phi(\frac{w}{\sigma\sqrt{۲}}))^۲$ ۳) $\sqrt{۱-۲\Phi(\frac{w}{\sigma\sqrt{۲}})}$ ۴) $\sqrt{۲\Phi(\frac{w}{\sigma\sqrt{۲}})}$

۸. فرض کنید $X \sim E(\lambda)$ و $Y \sim E(\mu)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. اگر $V = \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\}$، برای هر $v > ۰$، مقدار $P(V > v)$ کدام است؟

۱) $e^{-(\lambda+\mu)\upsilon}$ ۲) $\frac{\mu e^{-\lambda\upsilon} + \lambda e^{-\mu\upsilon}}{\lambda+\mu}$ ۳) $\frac{\lambda e^{-\lambda\upsilon} + \mu e^{-\mu\upsilon}}{\lambda+\mu}$ ۴) $\frac{e^{-(\lambda+\mu)\upsilon}}{\lambda+\mu}$

۹. تعداد تصادفات یک خودرو در هر سال دارای توزیع پواسون با میانگین λ و طول عمر خودرو یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{۱}{\mu}$ است. توزیع تعداد کل تصادفات در طول عمر ماشین کدام است؟

۱) $P(\frac{\lambda}{\mu})$ ۲) $Ge(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})$ ۳) $Ge(\frac{\mu}{\lambda+\mu})$ ۴) $P(\lambda\mu)$

۱۰. فرض کنید $\{X_r, r \geq ۰\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان باشند. اگر $M = \min\{n \geq ۱; X_۰ \geq X_۱ \geq \dots \geq X_{n-۱} < X_n\}$ مقدار $P(M = m)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{m!}$ ۲) $\frac{m+۱}{m!}$ ۳) $\frac{m}{(m+۱)!}$ ۴) $\frac{۱}{(m+۱)!}$

۱۱. فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای دلخواه با میانگین μ باشند، مقدار $E(X_۱ \mid \sum_{i=۱}^{n} X_i)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{n}$ ۲) $s^۲$ ۳) $\bar{X}$ ۴) n

۱۲. فرض کنید $X \sim U(۰,۱)$ و $Y \mid X = x \sim U(x, x+۱)$ باشد. مقدار $Var(X+Y)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲}{۱۲}$

۱۳. فرض کنید $X_۱, X_۲,\dots,X_{۲n}$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(۰,۱)$ باشد. اگر $D_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i^۲$، $R_n = \sum_{i=۱}^{n} \frac{X_{۲i-۱}}{X_{۲i}}$ و $T_n = \frac{R_n}{D_n}$، توزیع حدی T_n کدام است؟

۱) کوشی استاندارد ۲) یکنواخت روی فاصله $(-۱,۱)$
۳) نمایی با پارامتریک ۴) نرمال استاندارد

۱۴. فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $B(۲۰,\frac{۱}{۲})$ باشد. توزیع حدی $Y_n = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - ۱۰)^۲$ کدام است؟

۱) $N(۰,۱)$ ۲) نمایی ۳) $N(۵,۱)$ ۴) تباهیده در ۵-

۱۵. فرض کنید $X_۱, X_۲, \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان مطلقا پیوسته **F** باشند. اگر $X_{(۱)} = \min\{X_۱, X_n\}$ و $Y_n = nF(X_{(۱)})$ باشند، توزیع حدی Y_n کدام است؟

۱) $E(۱)$ ۲) $E(۲)$ ۳) $\chi^۲_{(۴)}$ ۴) $N(۰,۱)$

۱۶. فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی پیوسته و اکیدا صعودی $F(x)$ با میانگین μ باشد. اگر متغیرهای تصادفی Y_i به صورت زیر تعریف شوند،

$$Y_i = \begin{cases} 2 & \text{if } X_i > \mu \\ 1 & \text{if } X_i \le \mu \end{cases}, i = 1,...,n$$

MLE پارامتر μ کدام است؟

۱) $\bar{Y} - 1$ ۲) $F^{-1}(2 - \bar{Y})$ ۳) $F^{-1}(\bar{Y} - 1)$ ۴) $1 - F(\bar{Y})$

۱۷. فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta & \text{if } x = -1 \\ (1-\theta)^2 \theta^x & \text{if } x = 0,1,2,... \end{cases}, 0 < \theta < 1$$

اگر r_n نسبت اعضایی از نمونه باشد که مساوی ۱- هستند، برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی **(MLE)** پارامتر θ کدام است؟

۱) $\bar{X} + r_n$ ۲) $\frac{\bar{X}}{r_n}$

۳) $\frac{\bar{X} + r_n}{2n}$ ۴) $\frac{\bar{X} + 2r_n}{\bar{X} + 2}$

۱۸. فرض کنید ۱٫۱/۲٫۲ یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشد، که در آن $\theta \in \{1, 2\}$، برآورد گشتاوری θ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۴ ۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

۱۹. فرض کنید $X_{j+1} = \theta X_j + \varepsilon_{j+1}$، $j = 1,...,n-1$ که در آن $\varepsilon_j \text{iid} N(0,1)$ ،$j = 1,...,n-1$ و $X_1 \sim N(0, \frac{1}{1-\theta^2})$ است.

آماره بسنده برای θ کدام است؟

۱) $(\sum_{j=1}^{n-1} X_j X_{j+1}, \sum_{j=1}^{n} X_j^2)$ ۲) $(X_1^2, \sum_{j=1}^{n-1} X_j X_{j+1}, \sum_{j=2}^{n-1} X_j^2)$

۳) $(\sum_{j=1}^{n-1} X_j X_{j+1}, \sum_{j=2}^{n-1} X_j^2)$ ۴) $(X_1^2, \sum_{j=1}^{n-1} X_j X_{j+1}, \sum_{j=2}^{n} X_j^2)$

۲۰. فرض کنید ۲٫۴٫۱٫۳٫۸ یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ باشد. برآورد نااریب با کمترین واریانس برای تابع توزیع تجمعی در نقطه ۳، یعنی $F_\theta(3)$، کدام است؟

۱) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $1 - e^{-\frac{5}{6}}$ ۴) $\left(\frac{5}{6}\right)^5$

۲۱. فرض کنید $X_1,...,X_n, X_{n+1}$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر θ باشد. اگر $n = 6$ و $\sum_{i=1}^{7} x_i = 3$، بهترین برآورد نااریب برای $P_\theta(\sum_{i=1}^{n} X_i > X_{n+1})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲۲. **فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(۰,۱)$ باشد و Z_i ها به شکل زیر تعریف می‌شوند:**

$$Z_i = \begin{cases} X_i & w.p.\theta \\ -X_i & w.p.(۱-\theta) \end{cases}, ۰ < \theta < ۱$$

اگر P نمایانگر تعداد Z_i های مثبت باشد، برآوردگر UMVU پارامتر θ کدام است؟

۱) $\bar{z}$
۲) $\frac{P}{n}\bar{z} + (۱-\frac{P}{n})\bar{x}$
۳) $\bar{z}\,\bar{x}$
۴) $\frac{P}{n}$

۲۳. **فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta,۱)$ باشد، اگر $\bar{X}^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i^۲$، مقدار $E(\bar{X}^۲ \mid \bar{X})$ کدام است؟**

۱) $\theta^۲$
۲) $\bar{X}^۲ + \frac{n-۱}{n}$
۳) $۱+\theta^۲$
۴) $\bar{X}^۲$

۲۴. **فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد**

x	۰	۱	۲
$f_\theta(x)$	θ	۳θ	$۱-۴\theta$

$, ۰ < \theta < \frac{۱}{۴}$

کدام‌یک از توابع پارامتری زیر دارای برآوردگر UMVU است؟

۱) θ
۲) $(۱-\theta)^۲$
۳) $\theta(۱-\theta)$
۴) $\theta^۲$

۲۵. **فرض کنید X دارای توزیع پواسون با میانگین λ باشد. برآوردگر UMVU پارامتر $\frac{۱-e^{-\lambda}}{\lambda}$ کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۱+X}$
۲) Xe^{-X}
۳) $\frac{۱+X}{X}$
۴) $\frac{X}{۱+X}$

۱. گزینه ۴)

احتمال از بین رفتن $\Leftarrow e^{-\frac{2n^2}{4n^2+1}} \Leftarrow$ احتمال بقا $\Leftarrow 1-e^{\frac{-2n^2}{4n^2+1}}$

برای همیشه $1-e^{-\frac{1}{2}} \leftarrow n\to\infty$

۲. گزینه ۱)

$$P(G)=\frac{1}{2} \qquad P(\text{birth}\mid \text{birth girl}=2)=\frac{P(\text{birth},\text{birth girl}=2)}{P(\text{birth girl}=2)}-17$$

احتمال صفر $\text{birth}=1$ و احتمال صفر $\text{birth}=0 \Rightarrow$

$$\text{birth}=2\Rightarrow\frac{P(\text{birth girl}=2\mid\text{birth}=2)P(\text{birth}=2)}{P(\text{birth girl}=2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\times 0/14+0}{\frac{1}{4}\times 0/14+\frac{1}{8}\binom{3}{2}0/11+\frac{1}{16}\binom{3}{2}0/05}=\frac{0/14}{0/14+0/165+0/075}$$

$$\text{birth}=3\Rightarrow\frac{0/165}{0/14+0/165+0/075}\Rightarrow$$ در حالت ۳ تولد بیشترین احتمال وجود دارد.

$$\text{birth}=4\Rightarrow\frac{0/075}{0/14+0/165+0/075}$$

۳. گزینه ۴)

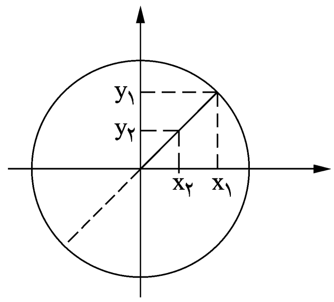
$$P(Y=y)=P([nX]=y)=P(y\le nX<y+1)=\int_{\frac{y}{n}}^{\frac{y+1}{n}}|\,dx=\frac{1}{n}-18$$

۴. گزینه ۲)

برای اینکه داخل باشد باید شرط روبه‌رو را داشته باشیم:

(فیثاغورث) $x_1^2+y_1^2\ge x_2^2+y_2^2$

$$\Rightarrow P(x_1^2+y_1^2\ge x_2+y_2^2)=P=P(F\ge 1)\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{x_2^2+y_2^2}\ge 1\right)$$



$$\left.\begin{array}{l}x_1^2+y_1^2\sim x^2_{(2)}\\ x_2^2+y_2^2\sim x^2_{(2)}\end{array}\right\rangle \text{ind}\Rightarrow\frac{x_1^2+y_1^2}{x_2^2+y_2^2}\sim F(2,2)$$

نکته: اگر درجه آزادی‌ها یکسان باشد و نسبت نقطه یک احتمال فوق را محاسبه کنیم این احتمال ۰/۵ است.

۵. گزینه ۳)

$$g(F(x)z+(1-F(x))w)\le F(x)g(z)+(1-F(x))g(w)$$
$$\text{if } z=1 \text{ and } w=0\le F(x)\Rightarrow g(F(x))\le F(x)$$

۶. گزینه ۴)

$$X_1, X_2 \sim N(0,\sigma^2) \Rightarrow X_1+X_2 \perp X_1-X_2 \Rightarrow (X_1+X_2)^2 \perp (X_1-X_2)^2$$

در نرمال استقلال را نتیجه می‌دهد.

$$\operatorname{cov}(X_1+X_2, X_1-X_2) = \operatorname{var}(X_1)-\operatorname{var}(X_2) = \sigma^2-\sigma^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \frac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2} + \frac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2} \sim E(2) \quad f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}f}$$

$$\Rightarrow P(f>1) = \int_1^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}f}\,df = e^{-\frac{1}{2}}$$

۷. گزینه ۱)

$$P(W<w) = P(\max\{|X-Y|,|X+Y|\}<w)$$
$$= P(|X-Y|<w, |X+Y|<w) \overset{?}{=} P(|X-Y|<w)P(|X+Y|<w)$$
$$= P(-w<X-Y<w)P(-w<X+Y<w)$$
$$= P\left(\frac{-w}{\sigma\sqrt{2}}<Z<\frac{-w}{\sigma\sqrt{2}}\right)P\left(\frac{-w}{\sigma\sqrt{2}}<Z<\frac{w}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$
$$= P\left(|Z|<\frac{w}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2 = \left(1-P\left(|Z|>\frac{w}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)^2$$
$$= \left(1-2P\left(Z>\frac{w}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)^2$$

یا $\left(1-2\Phi\left(-\frac{w}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)^2$

۸. گزینه ۲)

$$\max\{(X,Y)\} - \min(X,Y) = |X-Y|$$
$$P(V>v) = P(|X-Y|>v) =$$

$$V = |X-Y| \qquad P(V<v) = P(|X-Y|<v) = P(-v<X-Y<v) = \int_0^\infty \int_{\max(0,y-v)}^{v+y} \lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}\,dx\,dy$$

$$\int_0^v\int_0^{v+y} + \int_v^\infty\int_{y-v}^{v+y} = \int_0^v (1-e^{-\lambda(v+y)})\mu e^{-\mu y}dy + \int_v^\infty (e^{-\lambda(y-v)}-e^{-\lambda(v+y)})\mu e^{-\mu y}dy$$

$$= 1-e^{\mu v} - \frac{e^{-\lambda v}\mu}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)v}) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(e^{-\lambda\mu}-e^{\lambda v}(e^{-(\lambda+\mu)v}) = 1-\frac{\mu e^{-\lambda v}+\lambda e^{-\mu v}}{\lambda+\mu}$$

۹. گزینه ۱)

تعداد کل تصادفات در طول عمر ماشین از رابطهٔ زیر پیروی می‌کند:

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

که در آن X_i طول عمر خودرو i و N تعداد تصادفات در سال باشند. بنابراین:

$$E(Y) = E(N)E(X_i) = \frac{\lambda}{u}$$

از طرفی توزیع پواسون و نمایی با یکدیگر ارتباط نزدیک دارند، بنابراین توزیع تعداد تصادفات در طول عمر خودرو، پواسون با پارامتر $\frac{\lambda}{u}$ می‌باشد.

۱۰. گزینه ۳)

برای حالت اول یک انتخاب داریم، برای دومین یکی از دو حالت را بر می‌گزینیم و الی $m-1$ و برای m امین کافی است از یکـی از مابقی آنها بزرگ‌تر باشد.

$$\frac{1}{1}.\frac{1}{2}....\frac{1}{m}.\frac{m}{m+1}=(\frac{m}{(m+1)!})$$

۱۱. گزینه ۳)

در حالت خاص فرض کنیم نمونه از جامعه نرمال است.

به دلیل اینکه $\sum X_i$ در این نمونه آماره کامل می‌باشد و X_1 یک برآوردگر نااریب از μ می‌باشد، پس باتوجه به قضیه رائو ـ بلکول ـ لهمن شفه جواب $\bar{X}$ می‌باشد (UMVUE) .

۱۲. گزینه ۳)

$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{var}(Y)+2\mathrm{cov}(X+Y)$$

$$\frac{1}{12}+\mathrm{Var}(E(Y\mid X))+E(\mathrm{Var}(Y\mid X))+2(E(XY)-E(X)E(Y))$$

$$-\frac{1}{12}+\mathrm{Var}(X+\frac{1}{12})+E(\frac{1}{12})+2(E(E(XY\mid X))-E(X)E(E(Y\mid X)))$$

$$-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+2(E(x(x+\frac{1}{2})))-E(X)E(X+\frac{1}{2}))$$

$$=\frac{3}{12}+2(\frac{7}{12}-\frac{1}{12})=\frac{5}{12}$$

۱۳. گزینه ۱)

$$\frac{R_n}{D_n}=\frac{\frac{R_n}{n}}{\frac{D_n}{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{R_n}{n}\xrightarrow{D}\text{cauchy}(0,1)\\ \frac{D_n}{n}\xrightarrow{P}1\end{array}\right.\Rightarrow \text{cauchy}(0,1)$$

۱۴. گزینه ۴)

$$E(\mathrm{var})=\frac{1}{n}\sum E(X_i-10)^2=\frac{1}{n}\sum \mathrm{var}(X_i)=\frac{1}{n}\times n\times 5=5$$

با توجه به همگرایی در احتمال، توزیع آن تباهیده در ۵ می‌باشد.

۱۵. گزینه ۱)

$$F(x)\rightarrow \text{یکنواخت}\ \xrightarrow[\text{F با توجه به صعودی بودن}]{} F(X_{(1)})\sim B(1,n)$$

$$P(Y_n<y)=P(nF(X_{(1)})<y)=P(F(X_{(1)})<\frac{y}{n})=1-(\frac{1-y}{n})^n$$

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{Ln}}(1-\frac{y}{n})^n=e^{-y}\Rightarrow 1-e^{-y}\Rightarrow$$ توزیع نمایی

۱۶. گزینه ۲)

توزیع برنولی با $P=1-F(\mu)$

$$Z_i = Y_i - 1 = \begin{cases} 1 & X_i > \mu \\ 0 & X_i \le \mu \end{cases}$$

در توزیع برنولی MLE پارامتر P برابر است با میانگین مشاهدات

$$1-F(\hat{\mu}) \overset{\hat{P}=\hat{F}(\mu)}{=\!=\!=} \hat{P} \Rightarrow \hat{P} = \bar{Z} \underset{\text{قضیه ذهنا}}{=} \bar{Y} - 1$$

$$\Rightarrow 1 - F(\hat{\mu}) = \bar{Y} - 1 \Rightarrow \hat{\mu} = F^{-1}(2-\bar{Y})$$

۱۷. گزینه ۴)

$$f_\theta(x_i) = \theta^{c(x_i+1)}((1-\theta)^2\theta^{x_i})^{u(x_i)}$$

که $c(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$ و $u(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ در این مسئله داریم:

$$x_i = x_i u(x_i) + x_i c(x_i+1)$$

$$= x_i u(x_i) - c(x_i+1)$$

$$1 = u(x_i) + c(x_i+1)$$

$$L(\theta) = \theta^{\sum c(x_i+1)}(1-\theta)^{2\sum u(x_i)}.\theta^{\sum x_i u(x_i)}$$

$$\ln(\theta) = \ln(\theta)\sum c(x_i+1) + 2\ln(1-\theta)\sum u(x_i) + \ln(\theta)\sum x_i u(x_i)$$

$$= \ln(\theta)(\sum(c(x_i+1) + x_i u(x_i)) + 2\ln(1-\theta)\sum u(x_i)$$

$$= \ln\theta(\sum(2c(x_i+1) + x_i) + 2\ln(1-\theta)\sum(1-c(x_i+1))$$

$$= 2\sum c(x_i+1)(\ln(\theta) - \ln(1-\theta) + \ln(\theta) n\bar{X} + 2n\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ln(\theta)}{\partial\theta} = 2\sum c(x_i+1)(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}) + \frac{n\bar{X}}{\theta} - \frac{2n}{1-\theta} = 0$$

$$2\sum c(x_i+1)\frac{1}{\cancel{\theta(1-\theta)}} = \frac{2n\theta - n\bar{X}(1-\theta)}{\cancel{\theta(1-\theta)}}$$

$$2\sum c(x_i+1) = 2n\theta - n\bar{X} + n\bar{X}\theta = n\theta(\bar{X}+2) - n\bar{X}$$

$$2\sum c(x_i+1) + n\bar{X} = n\theta(\bar{X}+2) \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{2r_n + \bar{X}}{\bar{X}+2}$$

۱۸. گزینه ۴)

$$E(X) = \hat{\theta} = \frac{1 + 1.2 + 2}{3} = 1.4$$

۱۹. گزینه ۳)

$$\underset{\sim}{f(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n-1} f(\varepsilon_j) = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_j^2} = (\frac{1}{\sqrt{2n}})^n e^{-\frac{1}{2}\Sigma\varepsilon_j^2}$$

$$\Rightarrow f_{X_1}(X_1).\underset{\sim}{f(\varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{2n\frac{1}{1-\theta^2}}}e^{-\frac{(1-\theta^2)X_1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{1}{2}\Sigma(X_{j+1}-\theta X_j)^2}$$

$$\alpha = e^{\frac{+\theta^2X_1^2}{2}}.e^{-\frac{1}{2}\Sigma(X_{j+1}{}^2+\theta^2X_j^2-2\theta X_jX_{j+1})}$$

$$\alpha = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n-1}\theta^2X_j^2+\theta\sum_{j=1}^{n-1}\theta^2x_jx_{j+1}}$$