به نام یزدان پاک

آموزش هدفمند درس به درس سرفصل های مصوب

آمار ریاضی

تهیه‌کننده

سارا قنبری

آموزش هدفمند درس به درس سرفصل‌های آمار ریاضی
تهیه‌کننده : سارا قنبری
ناشر : پردازش
چاپ اول : ۱۴۰۳
تعداد : ۱۰۰
حروفچینی : پردازش
چاپ و صحافی: پردازش
قیمت : ۳۵۰۰۰۰ تومان

عنوان و پدیدآور	:	آموزش هدفمند درس به درس سرفصل‌های آمار ریاضی تهیه‌کننده: سارا قنبری
مشخصات نشر	:	تهران: پردازش، ۱۴۰۳
مشخصات ظاهری	:	۱۰۰ ص.
شابک	:	۹۷۸-۶۰۰-۲۳۳-۷۲۸-۳
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
موضوع	:	آمار -- راهنمای آموزشی (عالی)
موضوع	:	Statistics -- Study and teaching (Higher)
موضوع	:	آمار -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)
موضوع	:	Statistics-- Examinations, questions, ertc(Higher)
شناسه افزوده	:	نشر پردازش
رده بندی کنگره	:	HA۳۵
رده بندی دیویی	:	۴۲۲۰۷۶/۰۰۱
شماره کتابشناسی ملی	:	۵۹۶۳۶۶۸

نشر پردازش

تهران: میدان انقلاب، خیابان فروردین، خیابان شهدای ژاندارمری، روبه‌روی اداره پست، پلاک ۱۳۲و۱۳۰ ساختمان پردازش

تلفن : ۶۶۹۷۵۵۶۶ (۱۰۰ خط) دورنگار: ۶۶۴۰۷۴۰۸

www.Pardazesh.org

سایت برتر کشور در چهارمین و پنجمین همایش ملی تجارت الکترونیک

فهرست مطالب

فهرست آخرین سرفصل‌های مصوب آمار

آمار براساس آخرین سرفصل‌های مصوب وزارت علوم:

۱- مفاهیم پایه و تعاریف اساسی

- مروری بر توزیع‌های استاندارد، خانواده توزیع‌های نمایی، خانواده توزیع‌های مکان، مقیاس و مکان– مقیاس

۲- بسندگی و کامل بودن

- آماره‌ها وافرازها، آماره بسنده، آماره بسنده‌ی مینیمال، کامل بودن

۳- روش‌های برآوردیابی

- روش برآورد گشتاوری، روش ماکسیمم درستنمایی، روش کمترین توان‌های دوم

٤- برآوردگرهای ناریب با کمترین واریانس

- برآوردگرهای ناریب، برآوردگرهای ناریب با کمترین واریانس و روش‌های دستیابی به آن، نامساوی کرامر– رائو، کارایی، سازگاری.

۵- برآورد فاصله‌ای

- روش‌های کمیت محوری و عمومی، بازه‌ی اطمینان با دم‌های برابر، کوتاه‌ترین بازه‌ی اطمینان، بازه‌های اطمینان ناریب، بازه-های اطمینان با اندازه بزرگ

٦- آزمون فرض‌های ساده

- تعاریف و مفاهیم، آزمون پرتوان، آزمون نسبت درستنمایی، نمایش هندسی آزمون پرتوان

۷- پرتوان‌ترین آزمون‌های یکنواخت

- تعاریف ومفاهیم، پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت، بررسی بیشتر آزمون‌های نسبت، آزمون ناریب
- آزمون نسبت درستنمایی: آزمون نسبت در ستنمایی، توزیع مجانبی آماره درستنمایی، کاربرد آزمون در ستتنمایی، آزمون‌های نسبت درستنمایی در جدول‌های پیشایندی

فصل اول : مفاهیم و توزیع های احتمالی

«مفاهیم پایه و تعاریف اساسی: مروری بر توزیع‌های استاندارد، خانواده توزیع‌های نمایی، خانواده توزیع‌های مکان، مقیاس و مکان- مقیاس»

۱. **دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای تابع چگالی احتمال زیر است:**

$$f_{X_n}(x)=\begin{cases} 1 & x=\frac{1}{n} \quad n=1,2,... \\ 0 & \text{غیره} \end{cases}$$

توزیع حدی X_n کدام است؟ *(آمار ۸۸)*

۱) تباهیده در صفر ۲) تباهیده در یک ۳) یکنواخت روی $\{0,1\}$ ۴) وجود ندارد

۲. **فرض کنید $X_1,X_2,...$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $N(\mu,1)$ باشد. اگر $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$، توزیع کدام‌یک از آماره‌ها $\chi^2_{(1)}$ است؟** *(آمار ۹۰)*

۱) $\frac{n}{n-1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2$ ۲) $\frac{n}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X}_n)^2$

۳) $\frac{n}{n+1}(X_1-\overline{X}_n)^2$ ۴) $\frac{n}{n-1}(\overline{X}_n-\overline{X}_{n+1})^2$

۳. **فرض کنید X_1,X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان $N(0,1)$ باشند. اگر $Y_1=\frac{X_1}{X_2}$ و $Y_2=\sqrt{X_1^2+X_2^2}$، گزینه صحیح کدام است؟** *(آمار ۹۲)*

۱) Y_1 دارای توزیع $C(0,1)$ و Y_2 دارای توزیع $\chi^2_{(1)}$ و مستقل از هم هستند.

۲) Y_1 دارای توزیع $C(0,1)$ است اما مستقل از Y_2 نیست.

۳) Y_1 دارای توزیع $C(0,1)$ و Y_2 دارای توزیع $\chi^2_{(1)}$ و مستقل از هم هستند.

۴) Y_1 و Y_2 مستقل از هم هستند.

٤. **فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $B(1,p)$ باشد. اگر $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ و $\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_1^2$ باشند، مقدار $E(\overline{X}\overline{X}^2)$ کدام است؟** *(آمار ۹۳)*

۱) $p(1-p)+\frac{p^2}{n}$ ۲) $\frac{p(1-p)}{n}+p^2$ ۳) $\frac{p(1-p)}{n-1}+\frac{p^2}{n}$ ۴) $\frac{p(1-p)}{n(n-1)}+p^2$

فصل دوم: بسندگی، بسندگی مینیمال و کامل بودن

۱- ۲ بسندگی و کامل بودن

«بسندگی و کامل بود: آماره‌ها وافرازها، آماره بسنده، آماره بسنده‌ی مینیمال، کامل بودن»

۵. **فرض‌کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد،**

$$f_\theta(x) = \frac{2e^{-(x-\theta)}}{\left(1+e^{-(x-\theta)}\right)^2} \qquad \theta < x < +\infty \qquad -\infty < \theta < +\infty$$

آماره فرعی (کمکی) کدام است؟ *(آمار ۸۸)*

۱) $Z = \frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$ ۲) $Z = \frac{X_1}{X_n}$ ۳) $Z = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{X_n - X_1}$ ۴) $Z = \frac{X_{(1)} + 1}{X_1 - 1}$

۶. **فرض کنید X_1, X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع از تابع چگالی احتمال زیر باشند،**

$$f(x;\alpha)\alpha x^{\alpha-1}e^{-x\alpha}; x > 0, \alpha > 0$$

کدام‌یک از آماره‌های زیر، یک آماره فرعی است؟ *(آمار ۹۵)*

۱) $X_1 X_2$ ۲) $\frac{X_1}{X_2}$ ۳) $Ln(X_1)Ln(X_2)$ ۴) $\frac{Ln(X_1)}{Ln(X_2)}$

۲ - ۲ بسندگی

۷. **فرض‌کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هر کدام دارای توزیع برنولی با پارامتر $0 < p < 1$ باشد، اگر $U = X_1 + X_2$، کدام آماره بسنده نیست؟** *(آمار ۸۸)*

۱) e^U ۲) U^2 ۳) $U - U^2$ ۴) $U + U^2$

۸. **فرض‌کنید X و Y به ترتیب دارای تابع احتمال‌های زیر باشند،**

θ \ $X = x$	۰	۱
θ_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
θ_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

θ \ $Y = y$	۰	۱
θ_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
θ_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

کدام یک از عبارات زیر در مورد X و Y صحیح است؟ *(آمار ۸۸)*

۱) در مورد θ، X اطلاع بیشتری از Y دارد.

۲) X و Y دارای اطلاع یکسان درباره θ هستند.

۳) در مورد θ، Y اطلاع بیشتری از X دارد.

۴) با این تابع‌های احتمال نمی‌توان در خصوص اطلاع در مورد θ نتیجه‌گیری کرد.

۹. **فرض کنید $X_1, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و X_i دارای توزیع پواسون با پارامتر مجهول $\lambda\mu^{i-1} > 0$، $i = 1, ..., n$ باشد. آماره‌ی بسنده و کامل برای زوج (μ, λ) کدام است؟** *(آمار ۹۰)*

۱) $(\bar{X}, S^2)$ ۲) $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ ۳) $\left(\sum_{i=1}^{n} iX_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ ۴) $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} iX_i\right)$

۱۰. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد:

$$f_\theta(x)\begin{cases} ۲\theta(۱-\theta) & x=-۱ \\ \theta^x(۱-\theta)^{۳-x} & x=۰,۱,۲,۳ \end{cases}$$

کدام‌یک از گزاره‌های زیر در مورد این توزیع صادق است؟ $(a \neq ۰)$ *(آمار ۹۰)*

۱) $h(X)=X$ یک آماره بسنده و کامل است.

۲) $h(X)=\begin{cases} a & x=-۱ \\ ۰ & x=۰,۳ \\ -۲a & x=۱,۲ \end{cases}$ برآوردگر نااریب صفر است.

۳) $h(X)=X$ یک آماره کامل نیست اما کامل کران‌دار است.

۴) $h(X)=\begin{cases} ۰ & x=-۱ \\ a & x=۰,۳ \\ -۲a & x=۱,۲ \end{cases}$ برآوردگر نااریب صفر است.

۱۱. فرض کنید $X_۱,X_۲$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu,\sigma^۲)$ باشد. اگر $T(X_۱,X_۲)=(X_۱,۲X_۲)$، کدام گزینه صحیح است؟ *(آمار ۹۱)*

۱) آماره T بسنده نیست اما کامل است.
۲) آماره T بسنده و کامل است.
۳) آماره T بسنده است اما کامل نیست.
۴) آماره T نه بسنده است و نه کامل است.

۱۲. اگر $X_۱,\dots,X_۵$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر θ باشد، کدام آماره برای θ بسنده است؟ *(آمار ۹۱)*

۱) $\sum_{i=۱}^{۵} iX_i$
۲) $\sum_{i=۱}^{۵} \frac{X_i}{i}$
۳) $\sum_{i=۱}^{۵} (۲i-۱)X_i$
۴) $\sum_{i=۱}^{۵} (۲i+۱)X_i$

۱۳. فرض کنید $X_۱,X_۲,X_۳$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر $\theta(۱>\theta>۰)$ و $T=X_۱+X_۲+X_۳$ باشد. آماره $U(X_۱+X_۲,X_۱+X_۳)$ برای θ بسنده نیست، زیرا: *(آمار ۹۱)*

۱) U تابع T است.
۲) U و T مستقل‌اند.
۳) U و T هم‌توزیع هستند.
۴) T تابع U نیست.

۱۴. فرض کنید X_i ها $(i=۱,\dots,n)$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم از توزیع برنولی با پارامتر p_i باشند، که در آن $p_i=(۱+\exp(-i\alpha))^{-۱}$ است. آماره بسنده کامل برای α برحسب X_i ها کدام است؟ *(آمار ۹۲)*

۱) $\sum_{i=۱}^{n} \frac{X_i}{i}$
۲) $\sum_{i=۱}^{n} X_i$
۳) $\sum_{i=۱}^{n} iX_i$
۴) $\sum i^۲X_i$

۱۵. فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(۱,\theta)$ باشد. آماره بسنده برای θ کدام است؟ *(آمار ۹۲)*

۱) $\sum X_i$
۲) $\sum X_i^۲$
۳) $\sum X_i+\sum X_i^۲$
۴) $(\sum X_i,\sum X_i^۲)$

۱۶. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع جرم احتمال متعلق به خانواده زیر است.

θ \ X	۰	۱	۲	۳
$\theta_۱$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$
$\theta_۲$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۱۶}$

آماره بسنده برای θ براساس تک مشاهده X کدام است؟ *(آمار ۹۳)*

۱) $T(x)=\begin{cases} ۱ & x=۱,۲ \\ ۰ & x=۰,۳ \end{cases}$
۲) $T(x)=\begin{cases} ۱ & x=۰,۲ \\ ۰ & x=۱,۳ \end{cases}$
۳) $T(x)=\begin{cases} ۱ & x=۰,۱ \\ ۰ & x=۲,۳ \end{cases}$
۴) $T(x)=\begin{cases} ۱ & x=۱,۳ \\ ۰ & x=۰,۲ \end{cases}$

۱۷. فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $B(1,\theta)$، $0<\theta<1$، باشد. با تعریف:

$$T_1(\underset{\sim}{X})=(X_1,\dots,X_n)\ ,\ T_2(\underset{\sim}{X})=(X_1^2,\dots,X_2^2)$$

$$T_3(\underset{\sim}{X})=(\sum_{i=1}^{k}X_i,\ \sum_{i=k+1}^{n}X_i)\ ,\ T_4(\underset{\sim}{X})=\sum_{i=1}^{n}X_i\ ,\ T_5(\underset{\sim}{X})=\bar{X}$$

$$T_6(\underset{\sim}{X})=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\ ,\ T_7(\underset{\sim}{X})=(\sum X_i)^2$$

کدام یک از آماره‌های فوق بسنده هستند؟ (آمار ۹۳)

۱) همه T_i ها بسنده هستند.
۲) به‌جز T_7 بقیه بسنده هستند.
۳) به‌جز T_2 و T_6 بقیه بسنده هستند.
۴) به‌جز T_6 بقیه بسنده هستند.

۱۸. فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $B(1,\theta)$ باشد. کدام یک از آکار های زیر بسنده هستند. (آمار ۹۴)

$$(i)(X_1,\dots,X_n),\ (ii)(X_1^2,\dots X_n^2),(iii)\left(\sum_{i=1}^{k}X_i,\ \sum_{i=k+1}^{n}X_i\right)$$

$$(iv)\sum_{i=1}^{n}X_i\,,(v)\,\bar{X},(vi)\sum_{i=1}^{n}X_i^2\,,(vii)(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2$$

۱) فقط آمارهای $(i)-(v)$ برای θ بسنده هستند.
۲) فقط آمارهای $(i)-(vi)$ برای θ بسنده هستند.
۳) کلیه آمارها به جز (vi) برای θ بسنده هستند.
۴) کلیه آمارها برای θ بسنده هستند.

۱۹. فرض کنید X دارای تابع چگال احتمال زیر باشد،

$$f(x)=cf_1(x)f_2^2(x),x=0,1,\dots,m$$

که در آن $f_1(x)$ تابع احتمال توزیع دو جمله ای با پارامتر های $(m\ ,\ \theta)$ و $f_2(x)$ تابع احتمال توزیع هندسی با پارامتر θ می باشند. براساس یک نمونه تصادفی $X_1,\dots,X_n$ از X آمار بسنده برای θ کدام است ؟ (آمار ۹۴)

۱) $\sum_{i=1}^{n}X_i$
۲) $\prod_{i=1}^{n}X_i$
۳) $\sum_{i=1}^{n}\binom{m}{X_i}$
۴) $\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{X_i}$

۲۰. فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی ازتوزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. آماره بسنده برای α کدام است؟ (f تابع چگالی احتمال و F تابع توزیع معلوم هستند.) (آمار ۹۶)

$$g_\alpha(x)=\alpha f(x)F^{\alpha-1}(x)\quad \alpha>0,x>0$$

۱) $\sum_{i=1}^{n}\log F(X_i)$
۲) $\sum_{i=1}^{n}F(X_i)$
۳) $\sum_{i=1}^{n}\log f(X_i)$
۴) $\sum_{i=1}^{n}f(X_i)$

۲۱. فرض کنید $X_{i1},\dots,X_{in_i}$، $i=1,\dots,k$، نمونه‌های تصادفی مستقل باشند که در آن $X_{ij}\sim P(i\lambda)$، $j=1,\dots,n_i$ آماره بسنده برای λ کدام است؟ (آمار ۹۶)

۱) $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}iX_{ij}$
۲) $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}$
۳) $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{i}X_{ij}$
۴) $\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}$

۲۲. فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از تابع احتمال زیر باشد. اگر $X_{(1)}=\min(X_1,\dots,X_n)$، $X_{(n)}=\max(X_1,\dots,X_n)$ و $\bar{X}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ باشند. آماره بسنده برای (θ,α) کدام است؟ (آمار ۹۷)

$$f(x)=(1-\theta)\theta^{x-\alpha},x=\alpha,\alpha+1,\dots;0<\theta<1,a\in\mathbb{R}$$

۱) $X_{(1)}$
۲) $(X_{(1)},\bar{X})$
۳) $(\bar{X},X_{(n)})$
۴) $(X_{(1)},X_{(n)})$

۱. **گزینه ۱)**

$$E(X)=\sum_{x=1}^{3} x f_\theta(x)=1\times\frac{1-\theta}{2}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{\theta}{2}=\frac{3}{2}+\theta$$

حال با فرض مقدار فوق با $\overline{x}$ داریم:

$$\frac{3}{2}+\theta=\overline{x}\Rightarrow\hat{\theta}=\overline{x}-\frac{3}{2}$$

(پاسخ آمار ۸۸)

۲. **گزینه ۲)**

$$\mathrm{Var}(X_{n+1}-\overline{X}_n)=\mathrm{Var}(X_{n+1})+\mathrm{Var}(\overline{X}_n)=1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$$

$$E(X_{n+1}-\overline{X}_n)=0\Rightarrow\frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow\frac{n}{n+1}(\overline{X}_{n+1}-\overline{X}_n)\sim X^2_{(1)})$$

۳. **گزینه ۴)**

$$N\left(0,\sigma^2\right)\Rightarrow\left(\text{آماره کامل}\right)X_1^2+X_2^2\ \text{ is C.S.S for }\sigma^2$$

$$\frac{X_1}{X_2}\ \text{ is anxillary }\left(\text{آماره فرعی}\right)$$

$$\Rightarrow X_1^2+X_2^2\perp\frac{X_1}{X_2}$$

(پاسخ آمار ۹۲)

۴. **گزینه ۲)**

$$X\sim \mathrm{Binomial}(p)\,,\,X^2\sim \mathrm{Binomial}(p)$$

$$E(\overline{X}^2)=\mathrm{Var}(\overline{X})+E^2(\overline{X})=\frac{p(1-p)}{n}+p^2$$

(پاسخ آمار ۹۳)

۵. گزینه ۳)

$$Y_i = \beta x_i + E_i \;\; ; \;\; i = ۱,۲,...,n$$

$$E_i = Y_i - \beta x_i \qquad E_i \sim f(E_i) = \frac{۱}{\sigma} e^{-\frac{E_i}{\sigma}} \qquad ; \; i = ۱,۲,...,n \qquad ; E_i > ۰$$

حال برای یافتن $\hat{\beta}$ به روش MLE از تابع توزیع E_iها کمک می‌گیریم:

$$L = e^{-E_i} = e^{-(Y_i - \beta x_i)}$$

از طرفی بایستی داشته باشیم:

$$Y_i - \beta x_i \geq ۰ \Rightarrow \beta x_i \leq Y_i \Rightarrow \beta \leq \frac{Y_i}{x_i}$$

β از $\frac{Y_i}{x_i}$ کوچکتر است پس باید از کمترین مقدار آن نیز کمتر باشد. در نتیجه

$$\hat{\beta} = \min_{۱\leq i\leq n}\left(\frac{Y_i}{x_i}\right)$$

(پاسخ آمار ۸۸)

۶. گزینه ۴)

با توجه اینکه $X^{\alpha} \sim \exp(۱)$ تنها گزینه چهارم آماره فرعی است زیرا توزیع به پارامتر θ بستگی ندارد $\frac{Ln(X_۱^{\alpha})}{Ln(X_۲^{\alpha})} - \frac{\cancel{\alpha}\, Ln X_۱}{\cancel{\alpha}\, Ln X_۲}$

۷. گزینه ۱)

تابع توزیع X_n برابر است با:

$$F_n(x) = \begin{cases} ۰ & x < \frac{۱}{n} \\ ۱ & x \geq \frac{۱}{n} \end{cases}$$

و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$$

و تابع فوق تابع توزیع متغیر تصادفی ثابت X که در نقطه صفر تباهیده است.

(پاسخ آمار ۸۸)

۸. گزینه ۲)

$$X_۱, X_۲, X_۳, X_۴ \sim P(\lambda) \;\; ; \lambda \in [۱,۲]$$

$$f(x_i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$L = \prod_{i=۱}^{۴} f(x_i) = \frac{e^{-۴\lambda}\lambda^{\sum_{i=۱}^{۴} x_i}}{\prod_{i=۱}^{۴} x_i!} \Rightarrow l = \ln L = -۴\lambda + \sum_{i=۱}^{۴} x_i \; \ln\lambda + \ln(\prod_i x_i)$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = -۴ + \frac{\sum x_i}{\lambda} = ۰ \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum x_i}{۴} = \overline{x}$$

حال با توجه به اینکه λ تنها مقادیر $[۱,۲]$ را می‌گیرد و نمی‌تواند برابر $\overline{x} = ۳$ باشد بیشترین مقدار آن یعنی ۲ خواهد شد. پس

$$\lambda = ۲ \;\; \hat{\tau} = e^{-۲}$$

(پاسخ آمار ۸۸)

۹. گزینه ۴)

$$f(\underset{\sim}{x}) \alpha e^{-\lambda \sum \mu^{i-۱}} \lambda^{\sum x_i} \mu^{\sum i x_i} . \mu^{-n\sum x_i}$$

$$\Rightarrow \left(\sum x_i , \sum i x_i\right) \text{ is S.S}$$

(پاسخ آمار ۹۰)

۱۰. گزینه ۲)

$$E\left(h(x)\right)=h(-1)2\theta(1-\theta)+h(0)\ (1-\theta)^3+h\left(1\right)\theta(1-\theta)^2+h(2)\theta^2(1-\theta)+h(3)\theta^3$$

$$\theta^3\left(h(3)-h(2)+h(1)-h(0)\right)+\theta^2(h(2)-2h(1)+3h(0)-2h(-1)$$

$$+\theta\left(h(1)-3h(0)+2h(-1)\right)+h(0)=0$$

$$h(0)=0\qquad 2h(-1)=h(1)\qquad\qquad \Rightarrow h\left(-1\right)=a$$

$$\Rightarrow h\left(1\right)=-2a\quad\Rightarrow\quad h\left(X\right)=\begin{cases}a & X=-1\\ 0 & X=0/3\\ -2a & X=1/2\end{cases}$$

$$h\left(2\right)=-2a$$

$$h\left(3\right)=0$$

$$h\left(2\right)=-2a$$

$$h\left(3\right)=0$$

(پاسخ آمار ۹۰)

۱۱. گزینه ۳)

می‌دانیم در هر توزیع نمونه تصادفی آماره بسنده است، پس $(X_1, 2X_2)$ تابعی از نمونه تصادفی ۱−۱ و پرش آنگاه T بسنده است، امّا $E\left(g(T)\right)=X_1-X_2=0$، پس کامل نمی‌باشد. *(پاسخ آمار ۹۱)*

۱۲. گزینه ۲)

می‌دانیم که $\sum X_i$ آماره کامل است.

$\underset{\sim}{X}=(0,1,1,0,0)\qquad U(\underset{\sim}{X})=5=U(y)$

$\underset{\sim}{y}=(0,0,0,1)\qquad 2=\sum X_i\neq\sum y_i=1$

در سوم و چهارم با فرض اینکه داریم:

$\underset{\sim}{X}=(0,0,0,0,1)\qquad U(\underset{\sim}{X})=9=U(y)$

$\underset{\sim}{y}=(1,1,1,0,0)\qquad 1=\sum X_i\neq\sum y_i=3$

۱۳. گزینه ۴)

واضح است که T نمی‌تواند تابعی از U باشد. آن‌گاه چون T بسنده است پس U بسنده نمی‌شود. *(پاسخ آمار ۹۱)*

۱۴. گزینه ۳)

$$\prod f_{P_i}(\alpha_i)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+e^{-\alpha_i}}\right)^{X_i}\left(\frac{e^{-\alpha_i}}{1+e^{\alpha_i}}\right)^{1-X_i}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{\alpha_i}}{1+e^{\alpha_i}}\right)^{X_i}\left(\frac{1}{1+e^{\alpha_i}}\right)^{1-X_i}$$

$$=\underbrace{e^{\alpha\sum iX_i}}\prod\left(\frac{1}{1+e^{\alpha_i}}\right)$$

آمار بسنده کامل است و کامل بودن آن مشخص است.

(پاسخ آمار ۹۲)

۱۵. گزینه ۴)

$$f_\theta((X)\alpha\ e^{-\frac{(x-1)^2}{2\theta}}\Rightarrow f_\theta(\underset{\sim}{X})\alpha\ e^{-\frac{\sum X_i^2}{2\theta}+\frac{\sum X_i}{\theta}-\frac{1}{2\theta}}$$

$$\Rightarrow\sum X_i,\sum X_i^2$$

(پاسخ آمار ۹۲)

۱۶. هیچ‌کدام)

برای بررسی آماره بسنده باید امید ریاضی شرطی متغیر X به شرط آماره بسنده به پارامتر وابسته نباشد به این معنی که $p(X|T)$ به پارامتر وابسته نباشد. در هر سه گزینه توزیع شرطی به پارامتر وابسته است زیرا:

$$\text{if}\quad T(X)=\begin{cases}1 & X=1,2\\ 0 & X=0,3\end{cases}$$

$$P_{\theta_1}(X=0|T=0)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}}=\frac{2}{5}$$

$$P_{\theta_2}(X=0|T=0)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{16}}=\frac{8}{9}$$

$$\text{if}\quad T(X)=\begin{cases}1 & X=0,1\\ 0 & X=2,3\end{cases}$$

$$P_{\theta_1}(X=0|T=1)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$P_{\theta_2}(X=0|T=1)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{11}{16}}=\frac{8}{11}$$

$$\text{if}\quad T(X)=\begin{cases}1 & X=0,2\\ 0 & X=1,3\end{cases}$$

$$P_{\theta_1}(X=0|T=1)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}\ ,\ P_{\theta_2}(X=0|T=1)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

$$P_{\theta_1}(X=2|T=1)=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}\ ,\ P_{\theta_2}(X=2|T=1)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

$$P_{\theta_1}(X=1|T=0)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}}=\frac{2}{5}\ ,\ P_{\theta_2}(X=1|T=0)=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{4}{16}}=\frac{3}{4}$$

$$P_{\theta_1}(X=3|T=0)=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{5}\ ,\ P_{\theta_2}(X=3|T=0)=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{4}{16}}=\frac{1}{4}$$

بنابراین توزیع شرطی تحت هر یک از دو پارامتر یکسان نیست و به پارامتر θ_1 و θ_2 وابسته است. *(پاسخ آمار ۹۳)*

۱۷. گزینه ۱)

$$X_1,\cdots,X_n\sim B(1,\theta)$$