

به نام یزدان پاک

آموزش هدفمند درس به درس سرفصل های مصوب

مبانی احتمال

تهیه کننده

سارا قنبری

آموزش هدفمند درس به درس سرفصل‌های مبانی احتمال

تهیه‌کننده : سارا قنبری
ناشر : پردازش
چاپ اول : ۱۴۰۳
تعداد : ۱۰۰۰
حروفچینی : پردازش
چاپ و صحافی : پردازش
قیمت : ۳۰۰۰۰۰ تومان

حق چاپ محفوظ و متعلق به نشر پردازش است.

عنوان و پدیدآور : آموزش هدفمند درس به درس سرفصل‌های مبانی احتمال
تهیه‌کننده: سارا قنبری
مشخصات نشر : تهران: پردازش، ۱۳۹۸
مشخصات ظاهری : ۹۰ ص.
شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۲۳۳-۷۳۱-۳
وضعیت فهرست نویسی:

نشر پردازش

تهران: میدان انقلاب، خیابان فروردین، خیابان شهدای زاندارمری، روبه‌روی اداره پست، پلاک ۱۳۲ و ۱۳۰ ساختمان پردازش

تلفن : ۶۶۴۰۷۴۰۸ صد خط ۷-۶۶۹۷۵۵۶۱ دورنگار: ۶۶۴۰۷۴۰۸

www.Pardazesh.org

سایت برتر کشور در چهارمین و پنجمین همایش ملی تجارت الکترونیک

فهرست مطالب

فصل اول «آنالیز ترکیباتی».....	۷
فصل دوم «اصول احتمال».....	۹
فصل سوم «احتمال شرطی و استقلال».....	۱۱
فصل چهارم «متغیرهای تصادفی».....	۱۴
فصل پنجم «متغیرهای تصادفی پیوسته».....	۲۰
فصل ششم «متغیرهای تصادفی با توزیع توأم».....	۲۵
فصل هفتم «خواص امید ریاضی».....	۳۳
فصل هشتم «قضایای حدی».....	۳۸
«پاسخ‌نامه سوال‌های طبقه‌بندی شده مبانی احتمال».....	۴۰
پاسخ‌نامه فصل دوم «اصول احتمال».....	۴۳
پاسخ‌نامه فصل سوم «احتمال شرطی و استقلال».....	۴۵
پاسخ‌نامه فصل چهارم «متغیرهای تصادفی».....	۵۰
پاسخ‌نامه فصل پنجم «متغیرهای تصادفی پیوسته».....	۵۹
پاسخ‌نامه فصل ششم «متغیرهای تصادفی با توزیع توأم».....	۶۷
پاسخ‌نامه فصل هفتم «خواص امید ریاضی».....	۸۰
پاسخ‌نامه فصل هشتم «قضایای حدی».....	۸۸

فهرست آخرین سرفصل‌های مصوب مبانی احتمال

مبانی احتمال براساس آخرین سرفصل‌های مصوب وزارت علوم:

سرفصل درس:

۱- آنالیز ترکیباتی

- ۱-۱- اصل اساسی شمارش
- ۱-۲- اصل اساسی شمارش
- ۱-۳- ترکیب‌ها
- ۱-۴- توزیع توپ‌ها در ظرف‌ها

۲- اصول احتمال

- ۲-۱- فضای نمونه پیشامد
- ۲-۲- اصول احتمال

۳- احتمال شرطی و استقلال

- ۳-۱- احتمال شرطی
- ۳-۲- فرمول بیز
- ۳-۳- پیشامدهای مستقل

۴- متغیرهای تصادفی

- ۴-۱- توابع توزیع
- ۴-۲- متغیرهای تصادفی گسسته
- ۴-۳- امید ریاضی و واریانس متغیرهای تصادفی گسسته

۵- متغیرهای تصادفی پیوسته

- ۵-۱- امید ریاضی و واریانس متغیرهای تصادفی پیوسته

۶- متغیرهای تصادفی با توزیع توأم

- ۶-۱- استقلال متغیرهای تصادفی
- ۶-۲- مجموع متغیرهای تصادفی مستقل
- ۶-۳- توزیع‌های شرطی - حالت پیوسته
- ۶-۴- توزیع‌های شرطی - حالت پیوسته
- ۶-۵- آماره‌های ترتیبی
- ۶-۶- توزیع توأم توابعی از متغیرهای تصادفی

۷- خواص امید ریاضی

- ۷-۱- امید ریاضی مجموع متغیرهای تصادفی
- ۷-۲- کوواریانس، واریانس مجموع و همبستگی

۸- قضایای حدی

- ۸-۱- قضایا و توزیع‌های حدی

فصل اول: آنالیز ترکیباتی

۱-۱- اصل اساسی شمارش

۱. اگر $\text{Var}(2X + 3Y + 1) = \text{Var}(2X - 3Y - 1)$ ، گزینه صحیح کدام است؟ (تبار ۹۲)

$$\text{Cov}(X, Y) = -2 \quad (1) \quad \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

۳ $\text{Cov}(X, Y) = 2$ (۴) X و Y همواره ناهمبسته‌اند.

۲. داده‌های آماری با یک رقم اعشار با نمودار ساقه و برگ (تنه و شاخه) زیر داده شده است.

۷	۱	۱	۲	۳	۳	۶	۷	۸
۸	۱	۲	۳	۴	۴	۵	۶	۶
۹	۲	۲	۳	۳				

داده‌های کمتر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف می‌کنیم میانگین داده‌های باقی‌مانده کدام است؟ (تبار ۹۳)

$$8/11 \quad (1) \quad 8/16 \quad (2) \quad 8/2 \quad (3) \quad 8/34 \quad (4)$$

۳. فرض کنید G, H و $\bar{X}$ به ترتیب نمایانگر میانگین‌های همساز (هارمونیک، توافقی)، هندسی و حسابی نمونه باشند. با فرض

$x_i = ar^{i-1}, i=1, \dots, n$ که در آن $r > 0$ و $a > 0$ ، کدام رابطه همواره درست است؟ (تبار ۹۳)

$$G^2 = \bar{X} \times H \quad (1) \quad \bar{X}^2 = G \times H \quad (2) \quad G = \frac{\bar{X} + H}{2} \quad (3) \quad H^2 = \bar{X} \times G \quad (4)$$

۴. در داده‌های زیر، با استفاده از نمودار جعبه‌ای، چند داده دور افتاده وجود دارد؟ (تبار ۹۶)

$$14, 18, 12, 44, 34, 66, 37, 14, 34, 14, 7, 23, 14, 22, 21 \quad (1) \text{ صفر} \quad (2) 1 \quad (3) 2 \quad (4) 3$$

۵. اگر جمع میانگین و میانه یک نمونه تصادفی ۱۲ تایی برابر ۲۲ و بزرگ‌ترین یافته نمونه برابر ۱۷ باشد، جمع میانگین و میانه وقتی که بزرگ‌ترین یافته نمونه با ۲۳ جایگزین شود، کدام است؟ (تبار ۹۷)

$$22/5 \quad (1) \quad 23 \quad (2) \quad 23/5 \quad (3) \quad 24 \quad (4)$$

۲ - ۱ جایگشت

۶. در داخل جعبه‌ای سه مهره سفید، یک مهره سبز و سه مهره سیاه موجود است. به تصادف و با هم چهار مهره از آن خارج می‌کنیم. انحراف معیار تعداد مهره‌های سفید موجود در نمونه کدام است؟ (تبار ۸۸)

$$\frac{2\sqrt{6}}{7} \quad (1) \quad \frac{4\sqrt{3}}{7} \quad (2) \quad \frac{24}{49} \quad (3) \quad \frac{48}{49} \quad (4)$$

۷. تاس سالمی را مرتباً پرتاب می‌کنیم تا خال ۶ ظاهر شود. در صورت مشاهده خال K ($K = 1, \dots, 5$)، K دقیقه صبر می‌کنیم و سپس تاس را دوباره پرتاب می‌کنیم. هرگاه T برابر زمان انتظار تا مشاهده خال ۶ باشد، مقدار امید ریاضی T کدام است؟ (تبار ۹۱)

$$13 \quad (1) \quad 14 \quad (2) \quad 15 \quad (3) \quad 17 \quad (4)$$

۸. مهره سفید و ۲ مهره سیاه در کیسه‌ای داریم. ۳ مهره را یکی یکی و با جای‌گذاری انتخاب می‌کنیم. اگر X نمایانگر تعداد مهره‌های سفید در این نمونه باشد، محتمل‌ترین مقدار X کدام است؟ (تبار ۹۱)

$$0 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$



۹. دو خط موازی L_1 و L_2 را در نظر بگیرید. روی هر یک از این دو خط ۷ نقطه قرار دارد. تعداد مثلث‌هایی که با این نقطه‌ها می‌توان ساخت، کدام است؟

(تبار ۹۲)

- (۱) ۲۱ (۲) ۱۴۷ (۳) ۲۹۴ (۴) ۳۶۴

۱۰. اگر تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر باشد، تعداد کل زیر مجموعه‌های آن کدام است؟

(تبار ۹۳)

- (۱) ۶۴ (۲) ۱۲۸ (۳) ۲۵۶ (۴) ۵۱۲

۱۱. سه جعبه با برچسب‌های ۱۰، ۲۵ و ۵۰ تومان مشخص شده‌اند، به چند طریق می‌توان این سه جعبه را با سکه‌های مناسب فوق پر کرد تا ارزش مجموع سه جعبه ۲۰۰۰ تومان باشد؟

(تبار ۹۴)

- (۱) ۷۰۳ (۲) ۷۱۶ (۳) ۸۲۰ (۴) ۸۶۱

۱۲. عدد ۳۴ را به چند طریق می‌توان به صورت مجموع ۴ عدد بیان کرد که همگی مضرب ۳ باشند؟

(تبار ۹۵)

- (۱) $\binom{7}{4}$ (۲) $\binom{8}{3}$ (۳) $\binom{11}{3}$ (۴) $\binom{11}{4}$

(تبار ۹۶)

۱۳. به چند طریق می‌توان ۵ حرف A و ۶ حرف B را در یک ردیف قرار داد که از راست و چپ یکسان خوانده شوند؟

- (۱) $\frac{5!}{3!}$ (۲) $\frac{10!}{5!5!}$ (۳) $\frac{5!}{3!2!}$ (۴) $\frac{1}{2} \times \frac{11!}{5!6!}$

(تبار ۹۷)

۱۴. به چند طریق می‌توان ۲۰ ورزشکار را به ۵ گروه دو نفره و ۲ گروه پنج نفره تقسیم نمود؟

- (۱) $\frac{20!}{(2!)^4(5!)}$ (۲) $\frac{20!}{(2!)^5(5!)^2}$ (۳) $\frac{20!}{(2!)^6(5!)^3}$ (۴) $\frac{20!}{(2!)^5(5!)^2 \cdot 7!}$

۱۵. عددهای سه رقمی که رقم‌های آن از مجموعه $\{1, \dots, 9\}$ است را در نظر بگیرید. چه تعداد از این عددها دو رقم پی‌درپی یکسان ندارند؟

(تبار ۹۸)

- (۱) ۵۶۷ (۲) ۵۷۶ (۳) ۵۳۷ (۴) ۵۷۳

۳ - ۱ ترکیب‌ها

۱۶. مقدار $\sum_{i=0}^{20} i \binom{20}{i}$ کدام است؟

- (۱) 2^{20} (۲) 2^{21} (۳) 5×2^{20} (۴) 5×2^{21}

۴ - ۱ توزیع توپ‌ها در ظرف‌ها

۱۷. ۵ مهره ناهم‌رنگ را به تصادف در ۵ ظرف به شماره‌های ۱ تا ۵ می‌ریزیم. احتمال اینکه در ظرف‌های با شماره فرد فقط یک مهره قرار گیرد کدام است؟

(تبار ۹۸)

- (۱) $\frac{48}{625}$ (۲) $\frac{36}{625}$ (۳) $\frac{32}{225}$ (۴) $\frac{32}{125}$

فصل دوم: اصول احتمال

۲-۱- فضای نمونه و پیشامد

۱۸. فرض کنید یک کشور دارای ۱۰ استان است. اگر احتمال بیماری خاص در هر یک از استان‌ها برابر با p باشد، آنگاه احتمال بیماری در کشور کدام است؟

(تبار ۹۰)

- (۱) $\frac{p}{10}$ (۲) p (۳) $10 \cdot p$ (۴) هیچ کدام

۱۹. فرض کنید $X \sim U(-\theta, \theta)$ باشد که در آن $\theta > 0$ است. احتمال اینکه معادله $t^2 - Xt + X - 1 = 0$ دارای ریشه حقیقی باشد، کدام است؟

(تبار ۹۰)

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{\theta - 2}{2\theta}$

(تبار ۹۲)

۲۰. فرض کنید $P(A - B) = P(B - A)$. کدام گزینه درست است؟

- (۱) همواره $A = B$ (۲) $P(A) = P(B)$ (۳) A و B همواره مستقل‌اند. (۴) همواره A و B جدا از هم هستند.

۲ - ۲ اصول احتمال

۲۱. در جعبه‌ای ۱۰ کارت به شماره‌های ۱ تا ۱۰ وجود دارد. از این جعبه تعداد ۵ کارت به تصادف و بدون جایگذاری برمی‌داریم. احتمال اینکه شماره‌های این ۵ کارت متوالی باشد، کدام است؟

(تبار ۸۸)

- (۱) $\frac{1}{\binom{10}{5}}$ (۲) $\frac{5}{\binom{10}{5}}$ (۳) $\frac{1}{42}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۲. n جعبه داریم که هر یک دارای ۳ مهره A ، B و C هستند. یک مهره به تصادف از هر جعبه خارج می‌کنیم، احتمال اینکه A ، B و C متعلق به این مجموعه انتخاب شده باشد، کدام است؟

(تبار ۹۱)

- (۱) $\frac{2^n}{3^{n-1}}$ (۲) $\frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$ (۳) $1 - \frac{2^n}{3^{n-1}}$ (۴) $1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$

۲۳. در اتاق A دو دانشجوی ریاضی و سه دانشجوی آمار و در اتاق B تنها چهار دانشجوی ریاضی در انتظار مصاحبه علمی می‌باشند. یک اتاق را به تصادف انتخاب می‌کنند و از آن یک دانشجو را به تصادف برای مصاحبه صدا می‌کنند. احتمال اینکه دانشجوی ریاضی باشد، کدام است؟

(تبار ۹۲)

- (۱) $0/3$ (۲) $0/5$ (۳) $0/7$ (۴) $0/9$

۲۴. فرض کنید $X \sim U(-2\theta, \theta)$ باشد که در آن $\theta > 0$ است. احتمال اینکه عبارت $X^3 - 2X^2 + X$ اکیدا مثبت باشد، کدام است؟

(تبار ۹۲)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) ۱

۲۵. در یک شرکت میانگین حقوق ماهیانه کارکنان مرد $1/200/000$ تومان، میانگین حقوق کارکنان زن $700/000$ تومان و میانگین حقوق کلیه کارکنان $1/000/000$ تومان است، چند درصد کارکنان زن هستند؟

(تبار ۹۳)

- (۱) ۳۰٪ (۲) ۴۰٪ (۳) ۵۰٪ (۴) ۶۰٪



۲۶. سه نفر A و B و C سوار یک آسانسور هستند که می‌توانند در یکی از سه طبقه ساختمان پیاده شوند. فرض کنید هر فرد مستقل از دیگران پیاده می‌شود و شانس پیاده شدن هر شخص در هر طبقه‌ای یکسان است. احتمال اینکه در هر طبقه دقیقاً یک نفر پیاده شود کدام است؟

(تبار ۹۸)

(۴) $\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{4}{9}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{2}{9}$

۲۷. احتمال برنده شدن شخصی در یک بازی شانسی $\frac{9}{19}$ است. احتمال اینکه تعداد دفعات لازم برای برنده شدن این شخص

(تبار ۹۸)

عددی فرد باشد، کدام است؟

(۴) $\frac{19}{29}$

(۳) $\frac{9}{19}$

(۲) $\frac{10}{29}$

(۱) $\frac{10}{19}$

فصل سوم: احتمال شرطی و استقلال

۳-۱- احتمال شرطی

۲۸. در ظرفی ۳ توپ سفید و ۴ توپ سیاه وجود دارد. سه توپ از این ظرف یکی یکی بدون جای گذاری بیرون می آوریم. احتمال اینکه توپ اول و توپ سوم هر دو سفید باشند، کدام است؟

(تبار ۸۸)

$$(۱) \frac{1}{7} \quad (۲) \frac{2}{7} \quad (۳) \frac{3}{7} \quad (۴) \frac{4}{7}$$

۲۹. سه بازیکن «الف»، «ب» و «ج» هر کدام می توانند به ترتیب با احتمال های $\frac{3}{4}$ و $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{2}$ پرتاب توپ را وارد سبد بسکتبال نمایند. هر کدام از این بازیکن ها یک توپ پرتاب می نمایند. اگر فقط یکی از این سه پرتاب وارد سبد شده باشد، احتمال اینکه این توپ توسط بازیکن «ب» وارد سبد شده باشد، کدام است؟

(تبار ۸۸)

$$(۱) \frac{1}{3} \quad (۲) \frac{1}{12} \quad (۳) \frac{2}{3} \quad (۴) \frac{3}{4}$$

۳۰. شش فنجان و نعلبکی را در نظر بگیرید که دو جفت از آنها قرمز، دو جفت سفید و دو جفت آبی است. اگر فنجان ها را به تصادف روی نعلبکی ها بگذاریم (هر فنجان روی یک نعلبکی) احتمال اینکه هیچ فنجانی روی نعلبکی هم رنگ خود قرار نگیرد، کدام است؟

(تبار ۹۱)

$$(۱) \frac{8}{90} \quad (۲) \frac{10}{90} \quad (۳) \frac{8}{720} \quad (۴) \frac{10}{720}$$

۳۱. فرض کنید X_1 دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ و $X_2, \dots, X_n$ دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{2}{\theta}$ باشند. همچنین فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ مستقل از هم هستند. چقدر احتمال دارد X_1 کوچک ترین آماره مرتب در نمونه $X_1, \dots, X_n$ باشد؟ (تبار ۹۱)

$$(۱) \frac{\theta}{n+1} \quad (۲) \frac{2\theta}{n+1} \quad (۳) \frac{2}{n+1} \quad (۴) \frac{2}{n+\theta}$$

۳۲. ده عدد میله به تصادف از تولید انبوه یک کارخانه انتخاب کرده ایم. اگر طول واقعی میله ها X (سانتی متر) یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $10 \leq x \leq 12$, $f(x) = \frac{1}{4}$ باشد، احتمال اینکه در میان ده میله انتخابی، ۵ میله دارای طولی

(تبار ۹۱)

کمتر از ۱۰/۵ سانتی متر و ۲ میله دارای طولی بیش از ۱۱/۵ سانتی متر باشند، کدام است؟

$$(۱) \frac{315}{4^7} \quad (۲) \frac{63}{4^7} \quad (۳) \frac{315}{4^8} \quad (۴) \frac{63}{4^8}$$

۳۳. اگر X_1 و X_2 به ترتیب تعداد خال های ظاهر شده در پرتاب مستقل دو تاس سالم باشند، احتمال اینکه X_1 کمتر از X_2 باشد کدام است؟

(تبار ۹۳)

$$(۱) \frac{4}{12} \quad (۲) \frac{5}{12} \quad (۳) \frac{6}{12} \quad (۴) \frac{7}{12}$$

۳۴. دو نقطه به تصادف و مستقل از یکدیگر در فاصله $[0, 1]$ انتخاب می شود. اگر D فاصله بین این دو نقطه باشد، مقدار $P(D \leq 0.1)$ کدام است؟

(تبار ۹۳)

$$(۱) 0.18 \quad (۲) 0.19 \quad (۳) 0.81 \quad (۴) 0.91$$



۳۵. یک نمونه تصادفی $X_1, X_2, \dots$ از یک جامعه را در نظر بگیرید. احتمال اینکه مشاهده سومی از این جامعه مستقل از مشاهدات قبلی در سمت چپ کوچک‌ترین مشاهده نمونه دوتایی قرار گیرد، چقدر است؟

(تبار ۹۵)

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳۶. اگر $X_1, X_2, \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع مشترک برنولی با پارامتر p ($0 < p < 1$) و

$Y_n = \prod_{i=1}^n X_i, n \geq 1$ باشند، مقدار $E(Y_n Y_m)$ برای $m > n$ ، کدام است؟

(تبار ۹۵)

(۱) p^n (۲) p^{m-n} (۳) p^m (۴) p^{mn}

۳۷. سه نامه به صورت تصادفی به سه آدرس مجزا ارسال می‌شوند. احتمال اینکه هیچ کدام از نامه‌ها به آدرس صحیح نرسد، برابر است با:

(تبار ۹۵)

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{27}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۳۸. سیستمی با ۵ جزء را در نظر بگیرید، که مستقل از هم کار می‌کنند. اگر احتمال فعال بودن این اجزا به ترتیب برابر p و $2p$ و ... و $5p$ باشد، و سیستم تا زمانی که حداقل ۴ جزء آن فعال است، به فعالیت خود ادامه دهد، احتمال فعال بودن سیستم کدام است؟ ($p < \frac{1}{5}$)

(تبار ۹۵)

(۱) $274p^4 - 60 \cdot p^5$ (۲) $120p^5 - 274p^4$ (۳) $120p^5 + 250p^4$ (۴) $274p^4 - 480p^5$

۳۹. معمولاً ۷۵٪ از خبرهای شبکه A صحیح بوده، در حالی که این درصد برای شبکه B برابر ۸۰٪ است. در چند درصد از خبرها، این دو شبکه با هم مغایر هستند؟

(تبار ۹۵)

(۱) ۵٪ (۲) ۲۵٪ (۳) ۳۵٪ (۴) ۴۵٪

۴۰. از بین n زوج متاهل دو نفر را به تصادف و پی‌درپی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه دو نفر انتخاب شده زن و شوهر باشند، چقدر است؟

(تبار ۹۵)

(۱) $\frac{1}{2(2n-1)}$ (۲) $1 - \frac{1}{n}$ (۳) $\frac{1}{2n-1}$ (۴) $1 - \frac{1}{2n}$

۴۱. کیسه‌ای شامل ۴ مهره قرمز و ۶ مهره آبی است. کیسه دیگری شامل ۱۶ مهره قرمز و تعدادی مجهول مهره آبی است. یک مهره به تصادف از هر کیسه انتخاب می‌شود، احتمال اینکه دو مهره انتخابی هم‌رنگ باشند $\frac{1}{44}$ است. تعداد مهره‌های آبی کیسه دوم کدام است؟

(تبار ۹۶)

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۲۰

۴۲. فرض کنید $A_1, \dots, A_n$ پیشامدهای مستقلی باشند به طوری که برای هر $i=1, \dots, n$ داشته باشیم $P(A_i) = \frac{1}{i+1}$. احتمال اینکه حداقل یکی از A_i ها رخ دهد کدام است؟

(تبار ۹۶)

(۱) $\frac{1}{n+1}$ (۲) $\frac{n}{n+1}$ (۳) $\frac{n-1}{n}$ (۴) $\frac{1}{n}$

۴۳. از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ تعداد ۶ عدد را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه کوچک‌ترین عدد انتخابی از ۴ بزرگ‌تر باشد، کدام است؟

(تبار ۹۶)

(۱) $(\frac{3}{5})^6$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $(\frac{1}{10})^6$ (۴) $\frac{1}{210}$



۱. گزینه ۴)

$$\begin{aligned} \text{Var}(2Y + 3X + 1) &= \text{Var}(2Y - 3X - 1) \\ \Rightarrow 4\text{Var}(Y) + 9\text{Var}(X) + 12\text{Cov}(X, Y) &= 4\text{Var}(Y) + 9\text{Var}(X) - 12\text{Cov}(X, Y) \\ \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) &= -\text{Cov}(X, Y) \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0 \end{aligned}$$

(پاسخ آمار ۹۲)

۲. گزینه ۳)

$$= 8/2 = \text{میانگین داده های باقی مانده}$$

(پاسخ آمار ۹۳)

۳. گزینه ۱)

$$G^2 = \bar{X} \times H$$

$$G = \sqrt[n]{x_1, \dots, x_n}$$

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad \text{و} \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

با توجه به اینکه فرمول

(پاسخ آمار ۹۳)

۴. گزینه ۲)

فقط عدد ۶۶ به عنوان داده دور افتاده شناخته می شود.

۵. گزینه ۱)

$$\bar{X} \text{ میانگین و } \tilde{X} \text{ میانه و } X(n) \text{ بزرگ ترین داده}$$

$$\bar{X} + \tilde{X} = 22$$

با توجه به فرضیات سوال

اگر به بزرگ ترین داده $(X(n) = 17)$ ۶ عدد اضافه کنیم تنها مقدار میانگین 0.5 واحد اضافه می شود و مقدار میانه تاثیری ندارد.

$$\bar{X}_{\text{جدید}} + \tilde{X}_{\text{جدید}} = 22/5$$

(پاسخ آمار ۹۷)

۶. گزینه ۱)

$$X \sim \text{HG}(\gamma, \beta, \lambda)$$

تعداد مهره های سفید را می توان یک متغیر تصادفی با توزیع فوق هندسی در نظر گرفت.

$$E(X) = \lambda \times \frac{\beta}{\gamma} = \frac{12}{\gamma}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\beta}{\gamma} \times \lambda \times \frac{\beta}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) = \frac{\beta}{\gamma} \times \frac{\lambda}{\gamma} = \frac{24}{49} \Rightarrow \sigma_X = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

(پاسخ آمار ۸۸)

۷. گزینه ۳)

$$E(T) = E(E(T|K)) = \frac{1}{6} (E(T+1) + E(T+2) + E(T+3) + E(T+4) + E(T+5))$$

$$\Rightarrow E(T) = \frac{5}{6} E(T) + \frac{15}{6} \Rightarrow E(T) = 15$$

(پاسخ آمار ۹۱)



(پاسخ آمار ۹۱)

۸. گزینه ۳)

$$\begin{aligned} X=0 &\Rightarrow \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27} \\ X=1 &\Rightarrow \binom{3}{1} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{6}{27} \\ X=2 &\Rightarrow \binom{3}{2} \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{12}{27} \\ X=3 &\Rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{27} \\ \Rightarrow X=2 \end{aligned}$$

(پاسخ آمار ۹۲)

۹. گزینه ۳)

در ابتدا، یکی از دو خط بالا یا پایین را انتخاب می‌کنیم. در مرحله بعد، یکی از نقاط روی خط انتخابی را انتخاب می‌کنیم و در مرحله آخر، دو نقطه از خط بعدی را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{2}{1} \binom{7}{1} \binom{7}{2} = 7 \times 7 \times 4 = 294$$

(پاسخ آمار ۹۳)

۱۰. گزینه ۲)

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} & \text{ فرمول تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه } n \text{ عضوی برابر} \\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6 \times 4} & \text{ فرمول تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی یک مجموعه } n \text{ عضوی برابر} \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6 \times 4} & \Rightarrow n-3=4 \Rightarrow n=7 \end{aligned}$$

بنا به فرض سوال

$$2^7 = 128$$

تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۷ عضوی:

(پاسخ آمار ۹۳)

۱۱. گزینه ۴)

۱۰ تومان	۲۵ تومان	۵۰ تومان
----------	----------	----------

$$10x + 25y + 50z = 2000$$

x = تعداد سکه‌های ۱۰ تومان

y = تعداد سکه‌های ۲۵ تومان

z = تعداد سکه‌های ۵۰ تومان

$$2x + 5y + 10z = 400$$

(پاسخ آمار ۹۵)

۱۲. هیچ‌کدام)

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 24, y_i > 0$$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 24, x_i > 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, x_i > 0$$

$$\binom{n-1}{r-1} = \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3}$$

مساله به پیدا کردن تعداد حالاتی که مجموع ۴ عدد نامنفی برابر ۸ شود تبدیل می‌شود.

فرض کنید y_1, y_2, y_3, y_4 ، ۴ عددی باشند که باید مجموع آنها ۲۴ شود.

چون می‌بایست y_i ها مضرب ۳ باشند لذا $y_i = 3x_i, x_i > 0$ در نظر می‌گیریم



۱۳. گزینه ۳

برای آنکه بتوانیم ۵ حرف A و ۶ حرف B را طوری در یک ردیف بچینیم که از طرف راست و چپ یکسان خوانده شود می‌بایست حرف A را در وسط قرار دهیم و ۲ حرف A و ۳ حرف B را در سمت راست و ۲ حرف A و ۳ حرف B دیگر را نیز در سمت چپ قرار دهیم. یعنی مساله به حالت چیدن تعداد ۲ حرف A و ۳ حرف B در یک ردیف تقلیل پیدا می‌کند.

$$\frac{5!}{3!2!}$$

(پاسخ آمار ۹۶)

(پاسخ آمار ۹۷)

۱۴. گزینه ۳

ابتدا از ۲۰ نفر ۲ تا گروه ۱۰ تایی انتخاب می‌کنیم. یک گروه قرار است به ۵ گروه ۲ نفر تقسیم شوند $\left(\begin{smallmatrix} 10 \\ 2, \dots, 2 \end{smallmatrix} \right)$ و گروه دیگر به ۲ تا گروه ۵ نفری $\left(\begin{smallmatrix} 10 \\ 5, 5 \end{smallmatrix} \right)$. با توجه به اینکه ترتیب افراد مهم نیست باید $\frac{1}{2!5!}$ هم ضرب کنیم.

$$\left(\begin{smallmatrix} 20 \\ 10, 10 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 10 \\ 2, 2, 2, 2, 2 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 10 \\ 5, 5 \end{smallmatrix} \right) \times \frac{1}{2!5!} = \frac{20!}{(2!)^6 \times (5!)^3}$$

۱۵. گزینه ۲

a b c

یا a و b شبیه هم هستند که ۱, ..., ۹: c تغییر می‌کند.

یا b و c شبیه هم هستند که ۱, ..., ۹: a تغییر می‌کند.

که تمام جایگشت‌هایی که ۲ عدد متوالی شبیه هم هستند برابر است با $9 \times 9 \times 2$ توجه داشته باشید در این دو حالت ۹ حالت مشترک وجود دارد. که فقط باید یک‌بار حساب شود.

$$9 \times 9 \times 9 = 729$$

$$9 \times 9 \times 2 - 9 = 153$$

(پاسخ آمار ۹۸)

$$729 - 153 = 576$$

۱۶. گزینه ۴

$$\sum_{i=0}^{20} i \binom{20}{i} = \sum_{i=0}^{20} 20 \cdot \binom{19}{i-1} = 20 \times \sum_{i=0}^{19} \binom{19}{i} = 20 \times 2^{19} = 2^{21} \times 5$$

(پاسخ آمار ۹۳)

(پاسخ آمار ۹۸)

۱۷. گزینه ۱



(پاسخ آمار ۹۰)

۱۸. گزینه ۲)

$$p(\text{احتمال در استان}) = \sum_{i=1}^{10} p(\text{احتمال در استان} | \text{احتمال در کشور})$$

$$= \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} \cdot p = p$$

مثال ساده‌تر مانند توزیع جمع توزیع برنولی است.

۱۹. گزینه ۳)

$$b^2 - 4ae = X^2 - 4(X-1) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2 \geq 0$$

(پاسخ آمار ۹۰)

حتما تحت هر شرایطی ریشه حقیقی دارد، پس گزینه ۳ صحیح است.

(پاسخ آمار ۹۲)

۲۰. گزینه ۲)

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(B)$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

(پاسخ آمار ۸۸)

۲۱. گزینه ۳)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$1-5; 2-6; 3-7; 4-8; 5-9; 6-10$$

تعداد حالت‌های ممکن برای آنکه ۵ کارت متوالی باشند عبارت است از:

$$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{\binom{10}{5}} = \frac{6}{10! / 5!5!} = \frac{1}{42}$$

۲۲. گزینه ۴)

مکمل این احتمال برابر آن است که هر سه مهره A و یا هر تا از سه حروف انتخاب

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n} \right) - \left(\binom{3}{1} \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

شود.

$$= 1 - \left(\frac{-1}{3^{n-1}} + \frac{2^n}{3^{n-1}} \right) = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$$

(پاسخ آمار ۹۱)

۲۳. گزینه ۳)

(پاسخ آمار ۹۲)

۳ دانشجوی آمار

۲ دانشجوی ریاضی

۴ دانشجوی ریاضی

A

B

$$P(\text{ریاضی}) = P(\text{ریاضی} | A)P(A) + P(\text{ریاضی} | B)P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{5} \right) = \frac{7}{10} = 0.7$$

(پاسخ آمار ۹۲)

۲۴. گزینه ۱)

$$X^3 - 2X^2 + X = X(X^2 - 2X + 1) = X(X-1)^2 \geq 0$$



$$P(X \geq 0) = \int_0^{\theta} \frac{1}{3\theta} = \frac{\theta}{3\theta} = \frac{1}{3}$$

(پاسخ آمار ۹۳)

۲۵. گزینه ۲)

$$\frac{\text{مجموع حقوق کارمندان مرد}}{\text{تعداد مردان}} = \frac{A}{M} = 1/200/000 \Rightarrow A = 1/2 \times 10^6 m$$

$$\frac{\text{مجموع حقوق کارمندان زن}}{\text{تعداد کارمندان زن}} = \frac{B}{n} = 700/000 \Rightarrow B = 7 \times 10^5 n$$

$$\frac{\text{مجموع حقوق کارمندان}}{\text{تعداد کارمندان}} = \frac{A+B}{n+m} = 1/000/000 \Rightarrow A+B = 10^6 (n+m)$$

$$1/2 \times 10^6 m + 7 \times 10^5 n = 10^6 (n+m)$$

$$1/2 m + 7/10 n = n + m$$

$$-1/2 n = -1/2 m$$

$$n = \frac{2}{3} m \Rightarrow m = \frac{3}{2} n$$

$$P(\text{درصد کارکنان زن}) = \frac{n}{n+m} = \frac{n}{n+\frac{3}{2}n} = \frac{2}{5} = 0.4$$

۲۶. گزینه ۱)

$$P(\text{هر فرد در یک طبقه پیاده شود}) =$$

برای طبقه اول یک نفر از سه نفر را انتخاب می‌کنیم که برابر است با $\binom{3}{1}$

برای طبقه دوم از ۲ نفر باقی‌مانده یک نفر را انتخاب می‌کنیم $\binom{2}{1}$

برای طبقه سوم نیز از ۱ نفر یک نفر را انتخاب می‌کنیم $\binom{1}{1}$

$$P(\text{هر فرد در یک طبقه پیاده شود}) = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1}}{3 \times 3 \times 3} = \frac{2}{9}$$

(پاسخ آمار ۹۸)

(پاسخ آمار ۹۸)

۲۷. گزینه ۴)



۲۸. گزینه (۱)

$$P(\text{توپ اول سفید} \cap \text{توپ دوم سفید} \cap \text{توپ سوم سفید}) = P(\text{توپ اول سفید} \cap \text{توپ سوم سفید}) + P(\text{توپ اول سفید} \cap \text{توپ دوم سفید}) + P(\text{توپ دوم سفید} \cap \text{توپ سوم سفید}) - P(\text{توپ اول سفید}) - P(\text{توپ دوم سفید}) - P(\text{توپ سوم سفید}) + P(\text{توپ اول سفید} \cap \text{توپ دوم سفید} \cap \text{توپ سوم سفید})$$

$P() = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{30}{7 \times 6 \times 5} = \frac{1}{7}$ توپ اول سفید $\cap$ توپ دوم سیاه $\cap$ توپ سوم سفید (پاسخ ۸۸)

۲۹. گزینه (۱)

پیشامدهای پرتاب توپ موفق سه بازیکن را به ترتیب با B, A و نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم S نشان‌دهنده پیشامد وارد سبد شدن تنها یک توپ باشد. با توجه به اینکه پیشامدهای B, A و C مستقل اند، خواهیم داشت:

$$P(S) = P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C)$$

$$= -\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$P(B|S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A' \cap B \cap C')}{P(S)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

(پاسخ آما، ۱۸)

۳۰. گزینه (۱)

$$\frac{6!}{2!2!2!} = 90 \leftarrow \text{تعداد کل حالات}$$

متمم این حالت برابر آن است که حداقل یک فنجان روی نعلبکی هم‌رنگ خود قرار گیرد.

$$\Rightarrow \text{یکی از سه رنگ را انتخاب می‌کنیم} \Rightarrow \binom{3}{1} , \frac{4!}{2!2!} \quad (با سه آلفا، ۹۱)$$

۳۱. گزینه ۳)

$$P(X_{(1)} = X_1) = P(\min(X_1, \dots, X_n) = X_1) = P(X_1 < X_2, X_1 < X_3, \dots, X_1 < X_n)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty P(X_{\gamma} > x) \cdot f_{X_{\gamma}}(x) dx = \int_0^\infty e^{-\frac{\theta \gamma - 1}{\gamma} x} \cdot \theta e^{-\theta x} dx \\ &= \int_0^\infty \theta e^{-x\theta \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma}\right)} dx = \frac{1}{\frac{\gamma + 1}{\gamma} \theta} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \end{aligned}$$

(پاسخ آما، ۹۱)

۳۲. گزینه (۱)

$$P(X < 1.0/\omega) = \frac{1}{4} \qquad P(1.0/\omega < X < 1.1/\omega) = \frac{1}{4}$$

$$P(X > 11/5) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 \cdot 1!}{5! 12! 3!} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Delta = \frac{\cancel{1}! \times 9 \times \cancel{1}! \times v \times \cancel{1}!}{\cancel{1}! \times \cancel{1}!} \times \frac{1}{v^v} \times \frac{1}{\cancel{1}!}$$

$$= \frac{\Delta \times 9 \times v}{v^v} = \frac{315}{v^v}$$

(۹۱، ۹۲)