

به نام یزدان پاک

همه سوال های

دکترای تخصصی (Ph.D)

آمار

۱۴۰۵

گردآورندگان

گروه مولفین

سرشناسه	: گروه مولفین
عنوان و پدیدآور	: همه سوال‌های دکترای تخصصی آمار / گردآورندگان: گروه مولفین
مشخصات نشر	: تهران: پردازش
مشخصات ظاهری	: ص: ۲۲×۲۹ س.م.
فروست	: همه سوال‌های دکترای تخصصی
شابک	: ۹۷۸-۶۳۵-۵۸۸۴-۲۳-۶

حق چاپ محفوظ و متعلق به ناشر است.

همه سوال‌های دکترای تخصصی (Ph.D) – آمار ۱۴۰۵

گردآورندگان	: گروه مولفین
ناشر	: پردازش
چاپ اول	: ۱۴۰۵
تعداد	: ۱۰۰
حروفچینی	: پردازش
چاپ و صحافی	: پردازش
قیمت	: ۱۵۰۰۰۰۰ تومان

نشر پردازش

تهران: میدان انقلاب، خیابان فروردین، خیابان شهدای ژاندارمری، روبه‌روی اداره پست، پلاک ۱۳۲ و ۱۳۰ ساختمان پردازش

تلفن: ۶۶۹۷۵۵۶۶ (۱۰۰ خط) ۹-۶۶۹۷۵۵۶۱ دورنگار: ۶۶۴۰۷۴۰۸

www.Pardazesh.org

سایت برتر کشور در چهارمین و پنجمین همایش ملی تجارت الکترونیک

فهرست مطالب

جدول فراوانی

مقدمه تحلیلی

۷	پیش گفتار.....
	آزمون دکترای آمار ۱۴۰۵
۱۱	مبانی آنالیز ریاضی.....
۱۲	پاسخ نامه مبانی آنالیز ریاضی.....
۱۹	درسنامه مروری مبانی آنالیز ریاضی.....
۲۰	ریاضی عمومی (۱ و ۲).....
۲۲	پاسخ نامه ریاضی عمومی (۱ و ۲).....
۳۳	درسنامه مروری ریاضی عمومی (۱ و ۲).....
۳۵	احتمال (۱ و ۲).....
۳۸	پاسخ نامه احتمال (۱ و ۲).....
۵۴	درسنامه مروری احتمال (۱ و ۲).....
۵۷	استنباط آماری ۱.....
۶۱	پاسخ نامه استنباط آماری ۱.....
۷۴	درسنامه مروری استنباط آماری ۱.....
۷۷	واژه نامه.....
۸۵	ضمایم.....
۹۷	منابع.....

جدول ۱: فراوانی موضوعی سوالات آزمون دکتری آمار (۱۴۰۰ تا ۱۴۰۵)

[illegible]

گزارش تحلیلی و توصیه‌های راهبردی ۱. تحلیل روندها: بررسی دفترچه‌های آزمون نشان می‌دهد که ساختار و بودجه‌بندی سوالات در این ۶ سال از ثبات بسیار بالایی برخوردار بوده است. همواره ۳۰ سوال به مجموعه (آنالیز، ریاضی و احتمال) و ۱۵ سوال به (استنباط آماری) اختصاص یافته است. با این حال، در بخش استنباط آماری، گرایش طراحان به سمت سوالات ترکیبی (استفاده همزمان از خواص خانواده نمایی و قضایای لیمن-شفه/باسو) و نظریه تصمیم (برآوردگرهای مجاز و مینیماکس در فضاهای پارامتر محدود) با شیب ملایمی در حال افزایش است.

۲. معرفی مباحث کلیدی: مهم‌ترین و پرسوال‌ترین مباحثی که داوطلبان باید بر آن‌ها تسلط مطلق داشته باشند عبارتند از: الف) «توزیع‌های توأم و امید ریاضی شرطی» با ۳۸ سوال که قلب تپنده بخش احتمال است. ب) «برآوردگرهای نقطه‌ای (خصوصاً UMVUE و MLE)» با ۳۹ سوال که تعیین‌کننده‌ترین بخش استنباط آماری است. ج) «انتگرال‌های چندگانه و قضایای برداری» در ریاضیات که پایه محاسبات احتمالی را تشکیل می‌دهند

۳. توصیه‌های راهبردی برای داوطلبان: زمان مطالعه خود را متناسب با وزن مباحث (احتمال ۳۷.۸٪، استنباط ۳۳.۳٪، ریاضی ۱۷.۸٪، آنالیز ۱۱.۱٪) تنظیم کنید. در درس آنالیز ریاضی، به جای درگیری با اثبات‌های طولانی، بر «مثال‌های نقض» و «رفتار مجانبی توابع در بررسی همگرایی یکنواخت» تمرکز کنید. در استنباط آماری، تسلط بر «قضیه فاکتوریزاسیون، خانواده نمایی و تبدیل‌های ژاکوبین» کلید طلایی حل سریع تست‌ها بدون نیاز به انتگرال‌گیری‌های زمان‌بر است. همچنین، حفظ کردن میانگین و واریانس توزیع‌های آماری (مخصوصاً توزیع‌های شرطی و آمیخته) سرعت تست‌زنی را به شدت افزایش می‌دهد.

مقدمه تحلیلی بر روند آزمون‌های دکترای آمار (۱۴۰۰ تا ۱۴۰۵)

ورود به مقطع دکترای آمار، نیازمند گذار از مطالعه سطحی به درک عمیق و تحلیلی مفاهیم است. بررسی دقیق و موشکافانه سؤالات آزمون دکتری در شش سال اخیر (۱۴۰۰ تا ۱۴۰۵)، نشان‌دهنده یک الگوی مشخص و هدفمند از سوی طراحان سازمان سنجش است. این تحلیل به شما کمک می‌کند تا با یک دید استراتژیک، زمان و انرژی خود را روی مباحثی متمرکز کنید که بیشترین وزن و اهمیت را در آزمون دارند.

در ادامه، به بررسی روند تغییرات، مباحث پرتکرار و چرخش‌های مفهومی در سؤالات این ۶ سال می‌پردازیم:

۱. مباحث همواره پرتکرار (هسته سخت آزمون)

بررسی سؤالات نشان می‌دهد که طراحان به برخی مباحث وفاداری ویژه‌ای دارند و تسلط بر آن‌ها برای موفقیت الزامی است:

- **مبانی آنالیز ریاضی و ریاضی عمومی:** مفاهیمی نظیر «همگرایی نقطه‌ای و یکنواخت دنباله توابع»، «پیوستگی یکنواخت»، «مجموعه‌های باز و بسته در فضاها» و «توزیع‌های متری» و همچنین در بخش ریاضیات عمومی، «انتگرال‌های چندگانه»، «محاسبه شار میدان‌های برداری» و «قضایای گرین، استوکس و دیورژانس گاوس» پایه‌های ثابت سؤالات هستند.
- **احتمال ۱ و ۲:** سؤالات مربوط به «آماره‌های ترتیبی (Order Statistics)» و توزیع‌های متصل به آن‌ها، «تغییر متغیرها (به‌ویژه تبدیل‌های ژاکوبی)»، «توزیع‌های توأم و شرطی» و «انواع همگرایی‌ها (در احتمال، در توزیع و ...)» هر ساله بخش عمده‌ای از سؤالات احتمال را به خود اختصاص می‌دهند.
- **استنباط آماری ۱:** سه رکن اصلی این بخش که همواره تکرار می‌شوند عبارتند از: ۱) یافتن «آماره‌های بسنده مینیمال و کامل» (به‌ویژه در خانواده‌های نمایی و توزیع‌های با تکیه‌گاه وابسته به پارامتر). ۲) استخراج بهترین برآوردگر ناریب (UMVUE). ۳) روش‌های برآورد بیزی و ماکسیمم درست‌نمایی (MLE).

۲. تغییر تمرکز طراحان؛ از محاسبات مکانیکی به سمت مفاهیم روش‌شناختی

یکی از بارزترین تغییرات در آزمون‌های اخیر (به‌ویژه در سال‌های ۱۴۰۳ تا ۱۴۰۵)، شیفت از سؤالات صرفاً محاسباتی به سمت سؤالات مفهومی، تحلیلی و روش‌شناختی است:

- **در بخش استنباط آماری:** تمرکز طراحان از برآوردهای نقطه‌ای کلاسیک، به سمت **نظریه تصمیم (Decision Theory)** تغییر جهت داده است. سؤالات متعددی بر مفاهیمی چون «برآوردگرهای مینیمکس (Minimax)»، «برآوردگرهای مجاز (Admissible)» و تحلیل توابع مخاطره و زیان (مربع خطا، قدر مطلق خطا و زیان‌های وزنی) متمرکز شده‌اند.
- **تغییر رویکرد در MLE:** طراحان دیگر به طرح سؤال از توزیع‌های پیوسته و مشتق‌پذیر اکتفا نمی‌کنند. در سال‌های اخیر، یافتن MLE در **فضاهای پارامتر گسسته و متناهی** و یا توزیع‌های دوضابطه‌ای که نیازمند درک عمیق از تابع نشانگر و توابع یکنوا هستند، بسیار پررنگ شده است.
- **استفاده از ترفندهای حدی و مجانبی:** در بخش احتمال و آنالیز، استفاده از قضایای حدی (مانند قضیه پیوستگی، قضیه اسلاتسکی و قضایای همگرایی) برای تحلیل رفتار مجانبی متغیرها به یک رویه معمول تبدیل شده است.

۳. بسامد بالای قضایا و شخصیت‌های کلیدی

در طراحی سؤالات استنباط آماری، دیدگاه‌ها و قضایای برخی از دانشمندان این عرصه بسامد بسیار بالایی دارند که داوطلب باید بر آن‌ها مسلط باشد:

- **نظریه لیمن-شفه (Lehmann-Scheffé):** برای یافتن UMVUE، استفاده از این قضیه در ترکیب با خانواده نمایی و آماره‌های بسنده کامل، شاه‌بیت سؤالات استنباط است.
- **قضیه باسو (Basu's Theorem):** بهره‌گیری از استقلال آماره‌های بسنده و آماره‌های کمکی (Ancillary) برای محاسبه سریع امید ریاضی کسرها، از ترفندهای هوشمندانه طراحان در سال‌های اخیر است.
- **فاکتوریزاسیون نیمن (Neyman Factorization):** پایه‌ای‌ترین ابزار برای تشخیص آماره‌های بسنده که در تحلیل توزیع‌های پیچیده مورد پرسش قرار می‌گیرد.
- **نظریه بیز (Bayes) و جفریز (Jeffreys):** استفاده از پیشین‌های مزدوج، پیشین‌های ناسره و توزیع‌های جفریز برای یافتن برآوردهای بیزی (میانگین پسین، میانه پسین و ...) در صدر سؤالات استنباط قرار دارد.

نتیجه‌گیری و توصیه استراتژیک

تحلیل ۶ سال گذشته نشان می‌دهد که برای موفقیت در آزمون دکترای آمار، حفظ کردن فرمول‌ها دیگر کارساز نیست. داوطلب موفق کسی است که بتواند ارتباط منطقی بین قضایا را درک کند (مثلاً ارتباط نظریه تصمیم با برآورد بیزی، یا ارتباط همگرایی‌ها در آنالیز با نظریه احتمال مجانبی). توصیه می‌شود در فرآیند مطالعه، به جای درگیری با محاسبات طولانی، بر تشخیص «نوع مسئله»، «شرایط تکیه‌گاه توزیع» و «انتخاب قضیه مناسب (مانند باسو یا لیمن-شفه)» تمرکز کنید.

ورود به مقطع دکترای تخصصی (Ph.D) در رشته‌ی آمار، نقطه‌ی عطفی در مسیر علمی هر پژوهشگر و دانشجویی است که مستلزم گذار از یادگیری‌های سطحی و محاسبات مکانیکی به سوی درک عمیق، شهودی و روش‌شناختی مفاهیم ریاضی و آماری است. بررسی دقیق و موشکافانه‌ی سؤالات آزمون ورودی دکترای تخصصی آمار (کد ۲۲۳۲) در سال‌های اخیر (به‌ویژه بازه‌ی شش‌ساله‌ی ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۵) گویای آن است که طراحان سازمان سنجش آموزش کشور، الگویی هدفمند، ساختاریافته و در عین حال تکامل‌یافته را دنبال می‌کنند؛ الگویی که در آن، حفظ کردن فرمول‌ها دیگر کارساز نیست و تنها داوطلبانی به موفقیت دست می‌یابند که پیوند منطقی و تحلیلی میان قضایای آنالیز ریاضی، حساب دیفرانسیل و انتگرال، نظریه‌ی احتمال و استنباط آماری را به درستی درک کرده باشند.

کتاب حاضر با عنوان «همه سؤالات دکترای تخصصی (Ph.D) آمار ۱۴۰۵»، به همت گروه مؤلفین انتشارات پردازش، نه به عنوان یک پاسخ‌نامه‌ی سنتی و معمولی، بلکه به مثابه‌ی یک «مرجع جامع آموزشی، تحلیلی و پژوهشی» تدوین و منتشر شده است. هدف غایی این اثر، تجهیز داوطلبان به دیدگاه استراتژیک، ارتقای شهود آماری و ارائه‌ی کوتاه‌ترین و مطمئن‌ترین مسیرهای حل مسئله در جلسه آزمون است.

روش‌شناسی و ساختار منحصربه‌فرد اثر

در تدوین این مجموعه، هر سؤال از زوایای گوناگون کالبدشکافی شده است تا مخاطب با هر سطح از آمادگی علمی، بیشترین بهره را از مطالعه ببرد. ارکان اصلی و بخش‌های تشکیل‌دهنده‌ی این کتاب به شرح زیر است:

۱. **تحلیل روندها، بودجه‌بندی و نقشه‌ی راه راهبردی** در بخش آغازین کتاب، گزارش تحلیلی دقیقی از فراوانی موضوعی سؤالات آزمون‌های دکترای آمار در شش سال اخیر (۱۴۰۰ تا ۱۴۰۵) در قالب جداول آماری ارائه شده است. در این بخش، وزن دقیق هر درس (احتمال با ۸/۳۷ درصد، استنباط آماری با ۳/۳۳ درصد، ریاضی عمومی با ۸/۱۷ درصد و مبانی آنالیز ریاضی با ۱/۱۱ درصد) و ریزمباحث آن‌ها مشخص گردیده است. همچنین، چرخش‌های مفهومی طراحان در سال‌های اخیر—نظیر گرایش به سمت نظریه‌ی تصمیم، برآوردهای مجاز و مینیماکس، یافتن برآوردهای درست‌نمایی (MLE) در فضاهای پارامتر گسسته یا توزیع‌های دوضابطه‌ای، و بهره‌گیری از قضایای حدی و مجانبی—به تفصیل واکاوی شده است تا داوطلب زمان مطالعه‌ی خود را هوشمندانه مدیریت کند.

۲. **کالبدشکافی چندلایه و پاسخ‌نامه‌ی تشریحی پیشرفته** پاسخ‌نامه‌ی تشریحی این کتاب در هر چهار سرفصل امتحانی (مبانی آنالیز ریاضی، ریاضی عمومی ۱ و ۲، احتمال ۱ و ۲، و استنباط آماری ۱) بر اساس یک معماری آموزشی نوین طراحی شده و در هر سؤال، لایه‌های تحلیلی زیر را پوشش می‌دهد:

- **هسته‌ی مفهومی و تحلیل تکیه‌گاه و مرزها:** پیش از ورود به محاسبات جبری، موضوع اصلی سؤال، ساختار توزیع، دامنه متغیرها و وابستگی یا عدم وابستگی تکیه‌گاه به پارامترهای مجهول به دقت بررسی می‌شود.
- **شهود هندسی، درک بصری و شهود آماری:** برای پرهیز از نگاه صرفاً فرمول‌محور، مفاهیم انتزاعی ریاضی و آماری (مانند همگرایی یکنواخت، مجموعه‌های کلپین در زیرفضا، شار میدان‌های برداری، و با تقارن توزیع‌ها) با بیانی ملموس و تصویرسازی‌های هندسی تبیین شده‌اند تا در ذهن خواننده ماندگار شوند.
- **اثبات محاسباتی گام‌به‌گام و رویکردهای جایگزین:** علاوه بر ارائه‌ی راه‌حل رسمی و استاندارد ریاضی، در بسیاری از سؤالات، روش‌های تحلیلی جایگزین (مانند استفاده از قضایای ساندویچ، فوبینی، تغییر متغیر ژاکوبین، یا مشتق‌گیری ضمنی) نیز آموزش داده شده است.
- **پیوند مفاهیم پایه با آمار و احتمال پیشرفته:** یکی از ویژگی‌های ممتاز و منحصربه‌فرد این کتاب، ایجاد پل ارتباطی میان مباحث ریاضیات محض و کاربردهای آن‌ها در آمار پیشرفته است. برای نمونه، ارتباط همگرایی یکنواخت با قضیه‌ی گلیونکو-کانتلی و هموارسازی در رگرسیون لاسو، ارتباط توپولوژی مرزها با قضیه‌ی پورتمنتو و الگوریتم‌های MCMC، ارتباط اعداد مختلط با توابع مشخصه و ایستایی سری‌های زمانی (ARMA)، و ارتباط انحنا منحنی و ماتریس هسین با اطلاعات فیشر و الگوریتم گرادیان صعودی به زیبایی تشریح شده است.

- **کالبدشکافی تله‌های آموزشی، دام‌های محاسباتی و نقد علمی:** در هر مبحث، رایج‌ترین خطاهای شناختی و محاسباتی داوطلبان در جلسه‌ی آزمون (مانند خلط تابع کراندار و تفاضل کراندار، اشتباه گرفتن انحنا و شعاع انحنا، یا مشتق‌گیری در فضاهای پارامتر گسسته) با عنوان «هشدار محاسباتی» و «تله‌های طراح» برجسته شده‌اند. همچنین، ابهامات تاییدی دفترچه یا فروض ضمنی طراحان (نظیر استفاده از مقدار اصلی کوشی در توزیع تی با یک درجه آزادی) با دیدگاهی منصفانه و علمی نقد و شفاف‌سازی شده است.

- **راه‌حل‌های تستی، میان‌برهای طلایی و نگاه به آینده:** از آنجا که در جلسه‌ی آزمون دکتری، زمان طلایی‌ترین سرمایه است، در پایان هر سؤال، تکنیک‌های حل سریع (۵ تا ۳۰ ثانیه‌ای)، روش‌های رد گزینه‌ی هوشمندانه با مثال‌های نقض استراتژیک، و فرمول‌های تعمیم‌یافته برای حل سؤالات مشابه در سال‌های آتی («نگاه به آینده») ارائه گردیده است.

۳. **درسنامه‌های مروری و الگوریتم‌های حل مسئله** در پایان هر یک از چهار بخش اصلی کتاب، یک «درسنامه‌ی مروری» جامع و هدفمند گنجانده شده است که عصاره‌ی نکات، فرمول‌ها و قضایای پرکاربرد آن درس را در قالب کادرهای مقایسه‌ای و جداول طبقه‌بندی‌شده در اختیار داوطلب قرار می‌دهد. به‌ویژه در بخش استنباط آماری، یک «الگوریتم گام‌به‌گام مواجهه با سؤالات در جلسه‌ی آزمون» طراحی شده است که به داوطلب می‌آموزد چگونه با اسکن سریع کلمات کلیدی سؤال، در کسری از ثانیه میان قضایای لیمن-شفه، باسو، فاکتوریزاسیون نیمین یا روش‌های بیزی، ابزار دقیق را انتخاب کند.

۴. **ضمایم و پیوست‌های کاربردی (جعبه ابزار آزمون دکتری)** بخش پایانی کتاب به پنج ضمیمه‌ی فوق‌العاده کاربردی اختصاص یافته است که به تنهایی ارزش یک کتابچه‌ی مرجع و مرور سریع (Cheat Sheet) در روزهای منتهی به آزمون را دارد:

- **ضمیمه اول:** کاتالوگ جامع خانواده‌های توزیع آماری (گسسته و پیوسته)، شامل تابع چگالی، میانگین، واریانس، تابع مولد گشتاور و احتمال، آماره‌های بسنده و کامل، و توزیع‌های پیشین مزدوج و پسین متناظر.
- **ضمیمه دوم:** جعبه ابزار قضایای مرجع، شرایط منظم بودن فیشر، روابط استقلال، نامساوی‌های بنیادین احتمالاتی (مارکف، چیشف، ینسن) و سلسله‌مراتب همگرایی‌ها و قضایای حدی (اسلاتسکی و لوی).
- **ضمیمه سوم:** ماتریس جامع استنباط بیزی و نظریه‌ی تصمیم، شامل انواع توابع زیان (توان دوم، قدر مطلق، صفر و یک، وزنی و LINEX)، برآوردگرهای بیزی متناظر، ریسک پسین و قواعد مینیماکس و پذیرفتگی.
- **ضمیمه چهارم:** جدول انتگرال‌های خاص و ویژه (گاما، بتا، گاوسی، فرولانی و دیریکله) به همراه تبدیلات دستگاه‌های مختصات (قطبی، استوانه‌ای و کروی) و دترمینان ژاکوبین آن‌ها.
- **ضمیمه پنجم:** چک‌لیست رده‌بندی روابط توپولوژیک در فضاهای متریک، شامل روابط شمول قطعی و مثال‌های نقض استاندارد برای عملگرهای درون، بستار، مرز و مجموعه مشتق.

۵. **دانشنامه و فرهنگ جامع واژگان تخصصی (Glossary) و فهرست منابع** برای تکمیل غنای علمی اثر و آشنایی کامل داوطلبان با ادبیات بین‌المللی رشته‌ی آمار، «فرهنگ جامع اصطلاحات و واژگان تخصصی» به همراه معادل‌های دقیق انگلیسی، تعریف علمی، فرمول شاخص و کاربرد تستی آن‌ها در چهار حوزه‌ی امتحانی تدوین شده است. در نهایت، فهرست کامل منابع رسمی دانشگاهی به دو زبان فارسی و انگلیسی (بر اساس استاندارد بین‌المللی APA) و منطبق بر کتب مرجع کلاسیک همچون کاسلا و برگر، لمان، هاگ و کریگ، فلر، راس، رودین، آپوستل، استوارت و توماس) درج گردیده است تا راهنمای پژوهشگران برای مطالعات عمیق‌تر باشد.

توصیه‌ی پایانی به داوطلبان گرامی

پیشنهاد می‌کنیم برای بهره‌برداری حداکثری از این کتاب، ابتدا «مقدمه تحلیلی و گزارش راهبردی» را مطالعه فرمایید تا دیدی کلان نسبت به ساختار آزمون پیدا کنید. سپس در هر درس، ابتدا خودتان به صورت زمان‌دار به سؤالات پاسخ دهید و پس از آن، پاسخ‌نامه‌ی تشریحی را نه فقط برای یافتن گزینه‌ی درست، بلکه برای آموختن «شهود حل مسئله»، «پیوندهای مفهومی» و «تکنیک‌های میان‌بر» به دقت بررسی کنید. مرور مستمر جداول درسنامه‌ها و ضمایم پایانی کتاب، تسلط و سرعت عمل شما را در جلسه‌ی آزمون به شکل چشمگیری تضمین خواهد کرد. گروه مؤلفین انتشارات پردازش امیدوار است که این اثر ماندگار، گامی استوار در جهت اعتلای دانش آمار در کشور بوده و مسیر ورود شما فرهیختگان گرامی را به عالی‌ترین مقطع تحصیلی دانشگاهی هموار سازد. از تمامی اساتید، صاحب‌نظران و دانشجویان ارجمند تقاضا داریم ما را از دیدگاه‌ها و پیشنهادهای سازنده‌ی خود برای ارتقای هرچه بیشتر چاپ‌های آتی بی‌بهره نگذارند.

با آرزوی موفقیت و کامیابی روزافزون گروه مؤلفین پردازش

آزمون دکتری آمار ۱۴۰۵

مبانی آنالیز ریاضی



۱. فرض کنید به ازای $0 \leq x \leq 1$ و $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم: $f_n(x) = \frac{n-1}{n+1}x^n$ و $g_n(x) = \frac{(\cos x)^n}{n}$. اگر $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ و

$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ ، آنگاه کدام مورد درست است؟

(۱) f و g پیوسته هستند.

(۲) f و g ناپیوسته هستند.

(۳) f پیوسته و تابع g ناپیوسته است.

(۴) تابع f ناپیوسته و تابع g پیوسته است.

۲. کدام مورد برای دنباله توابع $\left(\sqrt{x^2 \cos^2 x + \frac{1}{n^2}} \right)_{n=1}^{\infty}$ روی $\mathbb{R}$ درست است؟

(۱) همگرایی نقطه‌ای به یک تابع کران دار است.

(۲) همگرایی نقطه‌ای به یک تابع مشتق پذیر است.

(۳) همگرایی یکنواخت به یک تابع پیوسته است.

(۴) همگرایی یکنواخت نیست.

۳. کدام مورد برای توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ روی بازه $[0, \infty)$ درست است؟

(۱) f و g پیوسته یکنواخت نیستند.

(۲) f و g پیوسته یکنواخت هستند.

(۳) f پیوسته یکنواخت است، ولی g پیوسته یکنواخت نیست.

(۴) f پیوسته یکنواخت نیست، ولی g پیوسته یکنواخت است.

۴. اگر (X, d) یک فضای متریک و $A \subseteq X$ ، آنگاه کدام مورد درست است؟

(۱) $\partial(\bar{A}) \subseteq \partial(A)$

(۲) $\partial(\bar{A}) \subseteq \partial(A')$

(۳) $\partial(A') \subseteq \partial(A^\circ)$

(۴) $\partial(A^\circ) \subseteq \partial(A')$

۵. فرض کنید $Y = [0, 2] \cup (3, 7)$. کدام زیرمجموعه Y در فضای متریک $(Y, | \cdot |)$ هم باز و هم بسته است؟

(۱) $(0, 2)$

(۲) $[0, 2]$

(۳) $[0, 2]$

(۴) $(0, 2]$



پاسخ تشریحی:

موضوع اصلی این سؤال، بررسی «همگرایی نقطه‌ای» دنباله توابع و تأثیر آن بر ویژگی «پیوستگی» تابع حد است. برای بررسی پیوستگی توابع حد، باید ضابطه توابع $f(x)$ و $g(x)$ را با محاسبه حد نقطه‌ای به دست آوریم. ابتدا تابع $f_n(x)$ را در بازه $[0, 1]$ بررسی می‌کنیم. رفتار حد تابع x^n در این بازه دوگانه است. اگر $0 \leq x < 1$ باشد، حد x^n برابر صفر است، و اگر $x = 1$ باشد، حد آن برابر یک است. بنابراین:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} x^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تابع $f(x)$ در نقطه $x = 1$ دارای پرش (ناپیوستگی) است؛ زیرا حد چپ آن در $x = 1$ برابر صفر و مقدار تابع برابر یک است.

حال به بررسی تابع $g_n(x)$ می‌پردازیم. با توجه به اینکه $0 \leq x \leq 1$ است، می‌دانیم که مقدار کسینوس در این بازه مثبت و حداکثر برابر یک است، یعنی $0 < \cos(x) \leq 1$. بنابراین، برای هر x در این بازه، $(\cos x)^n$ یک مقدار کراندار بین صفر و یک است. وقتی این مقدار کراندار بر n تقسیم شود و n به سمت بی‌نهایت میل کند، حاصل حد برای تمامی نقاط بازه برابر صفر خواهد بود:

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\cos x)^n}{n} = 0$$

تابع حد $g(x)$ یک تابع ثابت و برابر صفر است که در سراسر بازه $[0, 1]$ پیوسته است. در نتیجه، تابع f ناپیوسته و تابع g پیوسته است.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} x^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\cos x)^n}{n} = 0$$

شهود هندسی و درک بصری:

برای درک بهتر، نمودار این توابع را در ذهن تصویرسازی کنید. در مورد $f_n(x)$ ، هرچه n بزرگتر می‌شود، نمودار تابع در بازه $[0, 1]$ بیشتر به سمت محور x ها (مقدار صفر) فشرده می‌شود، اما در نقطه انتهایی بازه یعنی $x = 1$ ، نمودار همواره به نقطه‌ای در نزدیکی ارتفاع $y = 1$ می‌خکوب شده است. این کشیدگی در نهایت باعث «پاره شدن» نمودار در نقطه $x = 1$ و ایجاد یک صخره عمودی می‌شود. اما در مورد $g_n(x)$ ، مخرج کسر به سرعت رشد کرده و کل نمودار تابع را مانند یک پتوی سنگین به طور یکنواخت به سطح محور x ها (ارتفاع صفر) می‌چسباند، لذا هیچ شکستگی یا پارگی در تابع نهایی رخ نمی‌دهد.

پیوند مفاهیم آنالیز با آمار و احتمال پیشرفته:

درک تفاوت بین رفتار توابع f_n و g_n قلب تپنده استنباط مجانبی در آمار دکتري است. تابع f_n صرفاً «همگرایی نقطه‌ای» دارد (معادل تقریبی همگرایی در احتمال)، اما به دلیل ناپیوستگی تابع حد، همگرایی آن «یکنواخت» نیست. در مقابل، g_n به دلیل وجود کران بالای مستقل از x (یعنی $\frac{1}{n}$)، به طور یکنواخت به صفر همگراست. این دقیقاً همان مفهومی است که در قضیه اساسی گلیونکو-کانتلی (Glivenko-Cantelli) در آمار استفاده می‌شود، جایی که ثابت می‌کنیم تابع توزیع تجربی (ECDF) نه تنها به صورت نقطه‌ای، بلکه به طور یکنواخت (Uniformly) به تابع توزیع واقعی جامعه همگرا می‌شود و پیوستگی را در حد حفظ می‌کند.



نکات تکمیلی:

یکی از مهملک ترین تله‌های مفهومی برای دانشجویان این است که تصور می‌کنند «اگر اعضای یک دنباله توابع پیوسته باشند، تابع حد آن‌ها نیز حتماً پیوسته است». سؤال دقیقاً روی همین کج‌فهمی دست گذاشته است. توابع $f_n(x)$ همگی چندجمله‌ای و کاملاً پیوسته هستند، اما تابع حد آن‌ها $f(x)$ ناپیوسته است. شرط لازم و کافی برای انتقال پیوستگی از دنباله توابع به تابع حد، برقراری شرط همگرایی یکنواخت (Uniform Convergence) است که تابع f_n فاقد آن، اما تابع g_n دارای آن است.

کادر جمع‌بندی مقایسه‌ای تابع f_n و g_n :

ویژگی مورد بررسی	دنباله تابع $f_n(x)$	دنباله تابع $g_n(x)$
ضابطه تابع حد	$x < 1$ (برای $x < 1$) و $x = 1$ (برای $x = 1$)	x (برای تمام نقاط بازه)
نوع همگرایی به تابع حد	صرفاً همگرایی نقطه‌ای	همگرایی نقطه‌ای و یکنواخت
وضعیت پیوستگی تابع حد	ناپیوسته در $x = 1$	پیوسته در سراسر $[0, 1]$
انتقال پیوستگی از n به بی‌نهایت	نقض شده است (تله آموزشی)	حفظ شده است

راه حل تستی:

در آزمون دکتری زمان طلاست. به محض دیدن ساختار x^n در بازه $[0, 1]$ ، فوراً باید به یاد رفتار دوگانه و ناپیوستگی آن در نقاط مرزی (به ویژه $x = 1$) بیفتید. با جایگذاری سریع $x = 1$ مقدار تابع f_n برابر ۱ می‌شود، در حالی که برای $x = 0.5$ مقدار آن در بی‌نهایت به صفر میل می‌کند. همین محاسبه ذهنی ۵ ثانیه‌ای نشان می‌دهد f ناپیوسته است (رد گزینه‌های ۱ و ۳). برای تابع g_n حضور n در مخرج یک کسر با صورت کراندار، تیر خلاص است و نشان می‌دهد کل تابع در بی‌نهایت صفر می‌شود که بدیهی است صفر یک تابع ثابت و پیوسته است. با این روش در کمتر از ۱۵ ثانیه به گزینه ۴ می‌رسید.

گزینه ۳. ۲.

پاسخ تشریحی:

موضوع اصلی این سؤال، بررسی نوع همگرایی (نقطه‌ای در برابر یکنواخت) یک دنباله از توابع هموار به یک تابع غیرهموار و بررسی حفظ ویژگی‌های توپولوژیک (مانند پیوستگی) در فرآیند حدگیری است.

ابتدا تابع حد نقطه‌ای $f(x)$ را با میل دادن $n \rightarrow \infty$ برای دنباله توابع $f_n(x) = \sqrt{x^n \cos^n x + \frac{1}{n^n}}$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^n \cos^n x + \frac{1}{n^n}} = \sqrt{x^n \cos^n x} = |x \cos x|$$

حال ویژگی‌های تابع حد $f(x) = |x \cos x|$ را بررسی می‌کنیم:

الف) کراندار: این تابع روی $\mathbb{R}$ کراندار نیست، زیرا با میل کردن x به سمت بی‌نهایت (مثلاً در نقاط $x = k\pi$)، مقدار تابع به بی‌نهایت میل می‌کند. پس گزینه ۱ مردود است.

ب) مشتق‌پذیری: تابع قدر مطلق در ریشه‌های درون قدر مطلق (جایی که عبارت تغییر علامت می‌دهد) مشتق‌پذیر نیست. به عنوان مثال در نقطه $x = 0$ مشتق چپ و راست متفاوت است (± 1). پس گزینه ۲ نیز مردود است.

پ) نوع همگرایی: برای بررسی همگرایی یکنواخت، باید سوپرمم اختلاف تابع حد و دنباله توابع را روی کل دامنه $\mathbb{R}$ بررسی کنیم. با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:



$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 \cos^2 x + \frac{1}{n^2}} - |x \cos x| \right|$$

$$= \frac{x^2 \cos^2 x + \frac{1}{n^2} - x^2 \cos^2 x}{\sqrt{x^2 \cos^2 x + \frac{1}{n^2}} + |x \cos x|} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 \cos^2 x + \frac{1}{n^2}} + |x \cos x|}$$

برای یافتن بیشترین مقدار این کسر (سوپرمم)، باید مخرج حداقل شود. مخرج در نقاطی که $|x \cos x| = 0$ کمترین مقدار خود یعنی $\frac{1}{n}$ را می‌گیرد. بنابراین:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

از آنجایی که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ نتیجه می‌گیریم که همگرایی این دنباله توابع یکنواخت است.

شهود هندسی و درک بصری:

تابع $f(x) = |x \cos x|$ نموداری شبیه به موجی دارد که دامنه‌اش پیوسته در حال افزایش است، اما در نقاط برخورد با محور x ها (مثل $x = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \dots$) دارای شکستگی‌های تیز (نقاط بازگشتی V شکل) است. دنباله توابع $f_n(x)$ دقیقاً مانند یک سمباده عمل کرده و این نقاط تیز را با منحنی‌های بسیار ظریف (شبیه به هذلولی) گرد و هموار می‌کند. هرچه n بزرگتر می‌شود، این گردشدگی‌ها تنگ‌تر شده و به نقاط تیز اصلی نزدیک‌تر می‌شوند. چون بیشترین فاصله عمودی بین منحنی هموار f_n و منحنی تیز f دقیقاً در همان نوک نقاط تیز رخ می‌دهد و برابر با $\frac{1}{n}$ است، این شکاف در سراسر محور اعداد حقیقی به طور یکپارچه و هماهنگ بسته می‌شود (همگرایی یکنواخت).

پیوند مفاهیم آنالیز با آمار و احتمال پیشرفته (ویژه دکترای آمار):

این سؤال یک شبیه‌سازی بسیار عالی از تکنیک‌های بهینه‌سازی در آمار استوار (Robust Statistics) و رگرسیون لاسو (Lasso Regression) است. در آمار، اغلب با توابع زیان (Loss Functions) روبرو می‌شویم که مشتق‌پذیر نیستند (مانند خطای قدر مطلق L_1). برای حل تحلیلی و کامپیوتری این توابع، از تکنیک‌های هموارسازی (Smoothing) استفاده می‌شود و تابع $|x|$ را با $\sqrt{x^2 + \epsilon^2}$ جایگزین می‌کنند. این سؤال به یک دانشجوی دکترای آمار اثبات می‌کند که این تقریب هموارساز، به طور یکنواخت به تابع زیان اصلی همگرا می‌شود و در نتیجه خواص مجانبی برآوردگرها (Asymptotic Properties of Estimators) در فرآیند بهینه‌سازی دستخوش تغییر و ناپایداری نخواهد شد.

نکات تکمیلی:

یک تله بسیار رایج برای دانشجویان در این مبحث، خلط دو مفهوم «تابع کراندار» و «تفاضل کراندار» است. دامنه این تابع اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ (یک مجموعه بی‌کران) است و خود تابع حد نیز بی‌کران است. بسیاری از داوطلبان به اشتباه تصور می‌کنند که همگرایی یکنواخت در بازه‌های بی‌کران برای توابعی که کراندار نیستند، محال است! این یک کج‌فهمی بزرگ است. قضیه همگرایی یکنواخت شرطی روی کراندار بودن خود تابع ندارد، بلکه **تفاضل** بین f_n و f (یعنی خطای تقریب) باید به طور یکنواخت و مستقل از x به صفر میل کند، که در اینجا با کران $\frac{1}{n}$ به زیبایی این اتفاق رخ داده است.



کادر جمع‌بندی مقایسه‌ای ویژگی‌های همگرایی:

مشخصه تحلیلی	رفتار در دنباله $f_n(x)$ و تابع حد $f(x)$	نتیجه‌گیری توپولوژیک
تابع حد نقطه‌ای ($n \rightarrow \infty$)	استخراج رادیکال و تولید تابع قدر مطلق: $ x \cos x $	تولید تابعی پیوسته اما غیرمشتق‌پذیر
رفتار در بی‌نهایت ($x \rightarrow \infty$)	نوسان با دامنه فزاینده به سمت بی‌نهایت	رد کراندارى تابع (رد گزینه ۱)
مشتق‌پذیری در ریشه‌ها	توابع f_n کاملاً هموار و مشتق‌پذیرند	تابع حد f در ریشه‌ها مشتق‌ناپذیر است (رد گزینه ۲)
نرخ خطای تقریب ($\sup f_n - f $)	خطای حداکثر برابر با $\frac{1}{n}$ در تمام دامنه	وابستگی خطا به دامنه حذف شده است (اثبات همگرایی یکنواخت)

راه حل تستی (میان‌بر تستی):

در کنکور، زمان برای محاسبه حد سوپریم وجود ندارد. به محض دیدن ساختار معروف $\sqrt{A^2 + \frac{1}{n^2}}$ ، بدانید که این یک «هموارساز یکنواخت» برای تابع $|A|$ است. حد نقطه‌ای تابع در کسری از ثانیه برابر $|x \cos x|$ محاسبه می‌شود. با جایگذاری $x = 2\pi, 4\pi, \dots$ متوجه می‌شوید تابع تا بی‌نهایت می‌رود (پس گزینه ۱ خط می‌خورد). به دلیل وجود قدر مطلق، در $x = 0$ نوک تیز است (پس گزینه ۲ خط می‌خورد). چون اختلاف $\sqrt{A^2 + \epsilon^2}$ و $|A|$ همواره کوچکتر یا مساوی ϵ (در اینجا $\frac{1}{n}$) است، همگرایی حتماً یکنواخت است. با این تحلیل چشمی، رسیدن به گزینه ۳ تنها ۲۰ ثانیه زمان نیاز دارد.

گزینه ۲. ۳

پاسخ تشریحی:

مبانی اولیه بررسی پیوستگی یکنواخت توابع $f(x)$ و $g(x)$ روی دامنه نیمه‌باز $[0, \infty)$ بر اساس قضایای استاندارد کراندارى مشتق (شرط لیبشیتس) و وجود حد متناهی در بی‌نهایت تأیید می‌گردد. با عبور از محاسبات خطی و تعاریف میانی $\epsilon - \delta$:
برای تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، رفتار تابع در مجاورت مبدأ و بی‌نهایت پردازش شده و مستقیماً به نتیجه نهایی می‌رسیم: پیوستگی در بازه فشرده اولیه (قضیه هاینه-کانتور) در ترکیب با مشتق کراندار در بی‌نهایت، شرط پیوستگی یکنواخت را تضمین می‌کند.

برای تابع $g(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ ، پیوستگی اولیه و محاسبه مستقیم حد در بی‌نهایت صورت می‌گیرد:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

شهود هندسی و درک بصری:

رفتار این توابع فاقد هرگونه نوسان وحشیانه یا شیب‌های بی‌نهایت در فواصل دور از مبدأ است. شیب نمودار رادیکالی $f(x)$ پس از جدا شدن از مبدأ، بلافاصله مهار شده و هموار می‌گردد. در مقابل، منحنی $g(x)$ به دلیل حضور مخرج سهموی قدرتمند، به سرعت سرکوب شده و به محور افقی مماس می‌شود. این آرامش مجانبی، ضامن حفظ پیوستگی یکنواخت در بی‌نهایت است.

پیوند مفاهیم آنالیز با آمار و احتمال پیشرفته (ویژه دکتری آمار):

این ساختارهای تحلیلی مستقیماً در زیربنای نظریه فرآیندهای تصادفی ارگودیک و مارتنگل‌ها ظاهر می‌شوند. تابع $g(x)$ ویژگی‌های بنیادین توابع مشخصه با افت سریع (Rapidly decaying characteristic functions) را در اثبات قضایای حد مرکزی به نمایش می‌گذارد، در حالی که تبدیلات هموار و یکنواخت مشابه $f(x)$ در تکنیک‌های تثبیت واریانس (Variance-stabilizing transformations) کاربرد قطعی دارند.



نکات تکمیلی:

فرض رایج داوطلبان مبنی بر الزام کرانداری تابع برای برخورداری از پیوستگی یکنواخت، کاملاً باطل است. تابع $f(x)$ با وجود رشد بی‌کران به سمت بی‌نهایت، کاملاً پیوسته یکنواخت است. معیار نهایی، کنترل نرخ تغییرات مجانبی است، نه کرانداری مطلق مقادیر تابع.

کادر جمع‌بندی مقایسه‌ای وضعیت پیوستگی یکنواخت:

مؤلفه ارزیابی	رفتار تابع $f(x)=x$	رفتار تابع $\sin x^2+x \lg(x)=$
وضعیت پردازش اولیه	پارامترها تأیید شد	پارامترها تأیید شد
تحلیل مجانبی ($x \rightarrow \infty$)	بی‌کران اما مهارشده	کراندار با حد صفر
نتیجه‌گیری نهایی توپولوژیک	پیوسته یکنواخت است	پیوسته یکنواخت است

راه حل تستی:

حضور ساختارهای کلاسیک ریاضی یک میان‌بر طلایی است. توابعی که در بی‌نهایت دارای مشتق کراندار هستند (نظیر توابع رادیکالی) و توابع پیوسته‌ای که در بی‌نهایت مجانب افقی دارند، بلادرنگ در دسته توابع پیوسته یکنواخت قرار می‌گیرند. اعمال این قانون در کسری از ثانیه، بدون هیچ‌گونه محاسبات جانبی، ما را به گزینه ۲ رهنمون می‌سازد.

گزینه ۱) .۴

پاسخ تشریحی:

موضوع اصلی این سؤال، بررسی روابط بین عملگرهای پایه‌ای توپولوژی (مرز، بستر، درون و مجموعه مشتق) در یک فضای متریک است. برای اثبات درستی گزینه اول، به تعاریف دقیق توپولوژیک رجوع می‌کنیم.

طبق تعریف، مرز یک مجموعه A برابر است با تفاضل درون آن از بستر آن: $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$.

حال می‌خواهیم مرز بستر A ، یعنی $\partial(\bar{A})$ را محاسبه کنیم. با جایگذاری $\bar{A}$ در تعریف مرز، خواهیم داشت:

$$\partial(\bar{A}) = \overline{\bar{A}} \setminus (\bar{A})^\circ$$

از آنجایی که بستر یک مجموعه بسته، با خود آن مجموعه برابر است ($\bar{\bar{A}} = \bar{A}$)، رابطه بالا به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\partial(\bar{A}) = \bar{A} \setminus (\bar{A})^\circ$$

از سوی دیگر، می‌دانیم که هر مجموعه زیرمجموعه بستر خویش است ($A \subseteq \bar{A}$). اگر از هر دو طرف این رابطه عملگر درون

(Interior) را بگیریم، رابطه زیرمجموعه بودن حفظ می‌شود: $A^\circ \subseteq (\bar{A})^\circ$.

در نظریه مجموعه‌ها، تفاضل نسبت به زیرمجموعه‌های بزرگتر، نتیجه کوچکتری می‌دهد. بنابراین:

$$\bar{A} \setminus (\bar{A})^\circ \subseteq \bar{A} \setminus A^\circ$$

سمت راست این رابطه دقیقاً تعریف ∂A است. بنابراین اثبات می‌شود که همواره $\partial(\bar{A}) \subseteq \partial A$ برقرار است.

$$\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$$

$$\partial(\bar{A}) = \bar{A} \setminus (\bar{A})^\circ = \bar{A} \setminus (\bar{A})^\circ$$

$$A^\circ \subseteq (\bar{A})^\circ \Rightarrow \bar{A} \setminus (\bar{A})^\circ \subseteq \bar{A} \setminus A^\circ = \partial A$$

شهود هندسی و درک بصری:

مجموعه A را مانند یک جزیره در نظر بگیرید که برخی از سواحل آن شنی (نقاط مرزی موجود در مجموعه) و برخی دیگر باتلاقی و غیرقابل دسترس (نقاط مرزی خارج از مجموعه) هستند. عملگر بستر $(\bar{A})$ ، تمام این سواحل را تثبیت کرده و جزیره را به یک