

به نام یزدان پاک

همه سوال های

دکترای تخصصی (Ph.D)

ریاضی

۱۴۰۴ - ۱۴۰۵

گردد آورندگان

گروه مولفین

سرشناسه	: گروه مولفین
عنوان و پدیدآور	: همه سوال‌های دکترای تخصصی ریاضی / گردآورانندگان: گروه مولفین
مشخصات نشر	: تهران: پردازش
مشخصات ظاهری	: ص: ۲۲×۲۹ س.م.
فروست	: همه سوال‌های دکترای تخصصی
شابک	: ۹۷۸-۶۳۵-۵۸۸۴-۲۳-۶

حق چاپ محفوظ و متعلق به ناشر است.

همه سوال‌های دکترای تخصصی (Ph.D) – ریاضی ۱۴۰۵ – ۱۴۰۴

گردآورانندگان	: گروه مولفین
ناشر	: پردازش
چاپ اول	: ۱۴۰۵
تعداد	: ۱۰۰
حروفچینی	: پردازش
چاپ و صحافی	: پردازش
قیمت	: ۳۳۰۰۰۰۰ تومان

نشر پردازش

تهران: میدان انقلاب، خیابان فروردین، خیابان شهدای ژاندارمری، روبه‌روی اداره پست، پلاک ۱۳۲ و ۱۳۰ ساختمان پردازش

تلفن: ۶۶۹۷۵۵۶۶ (۱۰۰ خط) ۹-۶۶۹۷۵۵۶۱ دورنگار: ۶۶۴۰۷۴۰۸

www.Pardazesh.org

سایت برتر کشور در چهارمین و پنجمین همایش ملی تجارت الکترونیک

فهرست مطالب

جدول فراوانی

مقدمه تحلیلی

۷	پیش گفتار
آزمون دکترای ریاضی ۱۴۰۴	
۱۱	مبانی علوم ریاضی
۱۲	پاسخ نامه مبانی علوم ریاضی
۱۶	درسنامه مروری مبانی علوم ریاضی
۱۸	مبانی ماتریس ها و جبر خطی
۲۰	پاسخ نامه مبانی ماتریس ها و جبر خطی
۲۴	درسنامه مروری مبانی ماتریس ها و جبر خطی
۲۶	مبانی آنالیز ریاضی
۲۷	پاسخ نامه مبانی آنالیز ریاضی
۳۴	درسنامه مروری مبانی آنالیز ریاضی
۳۶	مبانی آنالیز عددی
۳۷	پاسخ نامه مبانی آنالیز عددی
۴۲	درسنامه مروری مبانی آنالیز عددی
۴۴	مبانی احتمال
۴۵	پاسخ نامه مبانی احتمال
۴۸	درسنامه مروری مبانی احتمال
۴۹	بهینه سازی خطی
۵۰	پاسخ نامه بهینه سازی خطی
۵۴	درسنامه مروری بهینه سازی خطی
۵۶	مبانی جبر
۵۷	پاسخ نامه مبانی جبر
۶۳	درسنامه مروری مبانی جبر
۶۴	توپولوژی
۶۵	پاسخ نامه توپولوژی
۶۹	درسنامه مروری توپولوژی
۷۱	آنالیز حقیقی ۱
۷۳	پاسخ نامه آنالیز حقیقی ۱
۸۲	درسنامه مروری آنالیز حقیقی ۱
۸۴	جبر پیشرفته ۱
۸۶	پاسخ نامه جبر پیشرفته ۱
۹۹	درسنامه مروری جبر پیشرفته ۱
۱۰۱	بهینه سازی خطی پیشرفته ۱
۱۰۳	پاسخ نامه بهینه سازی خطی پیشرفته ۱
۱۰۸	درسنامه مروری بهینه سازی خطی پیشرفته ۱
۱۱۰	آنالیز عددی پیشرفته
۱۱۱	پاسخ نامه آنالیز عددی پیشرفته
۱۱۴	درسنامه مروری آنالیز عددی پیشرفته
۱۱۶	اصول آموزش ریاضی
۱۱۷	پاسخ نامه اصول آموزش ریاضی
۱۲۶	درسنامه مروری اصول آموزش ریاضی

آزمون دکترای ریاضی ۱۴۰۵

۱۲۸	 مبانی علوم ریاضی
۱۲۹	 پاسخ نامه مبانی علوم ریاضی
۱۳۳	 درسنامه مروری مبانی علوم ریاضی
۱۳۶	 مبانی ماتریس ها و جبر خطی
۱۳۷	 پاسخ نامه مبانی ماتریس ها و جبر خطی
۱۴۲	 درسنامه مروری مبانی ماتریس ها و جبر خطی
۱۴۴	 مبانی آنالیز ریاضی
۱۴۵	 پاسخ نامه مبانی آنالیز ریاضی
۱۵۱	 درسنامه مروری مبانی آنالیز ریاضی
۱۵۳	 مبانی آنالیز عددی
۱۵۴	 پاسخ نامه مبانی آنالیز عددی
۱۵۸	 درسنامه مروری مبانی آنالیز عددی
۱۶۰	 مبانی احتمال
۱۶۱	 پاسخ نامه مبانی احتمال
۱۶۵	 درسنامه مروری مبانی احتمال
۱۶۷	 بهینه سازی خطی
۱۶۸	 پاسخ نامه بهینه سازی خطی
۱۷۲	 درسنامه مروری بهینه سازی خطی
۱۷۳	 مبانی جبر
۱۷۴	 پاسخ نامه مبانی جبر
۱۷۷	 درسنامه مروری مبانی جبر
۱۷۹	 توپولوژی
۱۸۰	 پاسخ نامه توپولوژی
۱۸۴	 درسنامه مروری توپولوژی
۱۸۷	 آنالیز حقیقی ۱
۱۸۹	 پاسخ نامه آنالیز حقیقی ۱
۲۰۰	 درسنامه مروری آنالیز حقیقی ۱
۲۰۲	 جبر پیشرفته ۱
۲۰۴	 پاسخ نامه جبر پیشرفته ۱
۲۱۶	 درسنامه مروری جبر پیشرفته ۱
۲۱۸	 بهینه سازی خطی پیشرفته ۱
۲۲۰	 پاسخ نامه بهینه سازی خطی پیشرفته ۱
۲۲۵	 درسنامه مروری بهینه سازی خطی پیشرفته ۱
۲۲۷	 آنالیز عددی پیشرفته
۲۲۸	 پاسخ نامه آنالیز عددی پیشرفته
۲۳۳	 درسنامه مروری آنالیز عددی پیشرفته
۲۳۵	 اصول آموزش ریاضی
۲۳۷	 پاسخ نامه اصول آموزش ریاضی
۲۴۷	 درسنامه مروری اصول آموزش ریاضی
۲۵۱	 ضمایم
۲۶۹	 منابع

جدول تحلیل توزیع فراوانی موضوعی سوالات آزمون دکتری ریاضی (دوره ۶ ساله: ۱۴۰۰ الی ۱۴۰۵)

ردیف	نام حوزه اصلی و مباحث تخصصی	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲	۱۴۰۳	۱۴۰۴	۱۴۰۵	مجموع	درصد فراوانی
۱	مبانی علوم ریاضی	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۳۰	۶.۶۷٪
۱.۱	منطق ریاضی، جبر گزاره‌ها و سورها	۲	۱	۱	۲	۱	۱	۷	۱.۵۶٪
۱.۲	نظریه مجموعه‌ها، اشتراک/اجتماع اندیس‌دار و تفاضل متقارن	۱	۱	۱	۱	۱	۲	۷	۱.۵۶٪
۱.۳	رابطه‌ها (هم‌ارزی، افراز و مرتب جزئی/کلی)	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۶	۱.۳۳٪
۱.۴	اصول موضوعه (لم زرن و اصل انتخاب)	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۲	۰.۴۴٪
۱.۵	کاردینال‌ها، نظریه اعداد اصلی و فرض پیوستار	۱	۱	۲	۱	۱	۱	۸	۱.۷۸٪
۲	مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۳۰	۶.۶۷٪
۲.۱	فضاهای برداری، زیرفضاها و تحلیل بعد (فرمول گراسمان)	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۸	۱.۷۸٪
۲.۲	تبدیلات خطی، ماتریس نمایش، رتبه و پوچی	۲	۲	۲	۱	۱	۱	۹	۲.۰۰٪
۲.۳	مقادیر و بردارهای ویژه، دترمینان و اثر ماتریس	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۶	۱.۳۳٪
۲.۴	فضای طیفی، کیلی-همیلتون و چندجمله‌ای مینیمال	۱	۱	۱	۲	۱	۱	۷	۱.۵۶٪
۳	مبانی آنالیز ریاضی	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۳۰	۶.۶۷٪
۳.۱	توپولوژی فضای حقیقی، مجموعه‌ها و	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۴	۰.۸۹٪

ردیف	نام حوزه اصلی و مباحث تخصصی	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲	۱۴۰۳	۱۴۰۴	۱۴۰۵	مجموع	درصد فراوانی
	اینفیمم/سوپرمم								
۳.۲	دنباله‌ها و سری‌های عددی (تجدید آرایش و همگرایی مشروط)	۲	۱	۱	۱	۱	۱	۷	۱.۵۶٪
۳.۳	پیوستگی، پیوستگی یکنواخت و قضایای میانگین	۰	۱	۲	۲	۱	۱	۷	۱.۵۶٪
۳.۴	مشتق پذیری و ویژگی توابع مشتق	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۵	۱.۱۱٪
۳.۵	دنباله توابع، انتگرال ریمان و توابع تکه‌ای (تومه/دیریکله)	۱	۱	۱	۱	۲	۱	۷	۱.۵۶٪
۴	مبانی آنالیز عددی	۵	۵	۵	۴	۴	۴	۲۷	۶.۰۰٪
۴.۱	حساب ممیز شناور، پایداری و تحلیل خطا	۲	۱	۱	۱	۰	۰	۵	۱.۱۱٪
۴.۲	حل عددی معادلات غیرخطی و مرتبه همگرایی	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۵	۱.۱۱٪
۴.۳	درون‌یابی، تفاضلات تقسیم‌شده و برونیابی	۱	۲	۱	۱	۱	۲	۸	۱.۷۸٪
۴.۴	انتگرال گیری عددی (سیمپسون، دوزنقه‌ای و کوادراتور گاوس)	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۲	۰.۴۴٪
۴.۵	جبر خطی عددی، تجزیه ماتریسی و روش نیوتن دستگاه	۱	۲	۲	۰	۱	۱	۷	۱.۵۶٪
۵	مبانی احتمال	۵	۵	۵	۳	۳	۳	۲۴	۵.۳۳٪
۵.۱	اصول احتمال، شمارش ترکیبیاتی و بسط چندجمله‌ای	۲	۲	۱	۱	۲	۲	۱۰	۲.۲۲٪

ردیف	نام حوزه اصلی و مباحث تخصصی	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲	۱۴۰۳	۱۴۰۴	۱۴۰۵	مجموع	درصد فراوانی
۵.۲	احتمال شرطی، قانون احتمال کل و قضیه بیز	۱	۱	۲	۱	۰	۱	۶	۱.۳۳٪
۵.۳	متغیرهای تصادفی، توزیع‌های گسسته و پیوسته	۲	۲	۲	۱	۱	۰	۸	۱.۷۸٪
۶	بهینه‌سازی خطی	۰	۰	۰	۳	۳	۳	۹	۲.۰۰٪
۶.۱	هندسه ناحیه موجه و ساختار چندوجهی‌ها	۰	۰	۰	۲	۱	۱	۴	۰.۸۹٪
۶.۲	الگوریتم سیمپلکس و قواعد ورود/خروج متغیرها	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۴	۰.۸۹٪
۶.۳	فرمول‌بندی مسئله و دوگان مقدماتی	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۲	۰.۴۴٪
۷	مبانی جبر	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۳۰	۶.۶۷٪
۷.۱	ساختار گروه‌ها، زیرگروه‌ها و گروه دوری	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۱۲	۲.۶۷٪
۷.۲	گروه‌های متقارن، جایگشت‌ها و تجزیه دوری	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۳	۰.۶۷٪
۷.۳	نظریه حلقه‌ها، ایده آل‌ها، عناصر خودتوان و پوچ‌توان	۳	۳	۲	۲	۲	۳	۱۵	۳.۳۳٪
۸	توپولوژی عمومی	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۳۰	۶.۶۷٪
۸.۱	اصول موضوعه توپولوژی، پایه و زیرفضای توپولوژیک	۱	۱	۰	۱	۲	۲	۷	۱.۵۶٪
۸.۲	فشردگی، همبندی و فضاهای موضعاً فشرده	۱	۲	۱	۱	۱	۰	۶	۱.۳۳٪
۸.۳	اصول جداسازی	۱	۱	۱	۱	۱	۲	۷	۱.۵۶٪

ردیف	نام حوزه اصلی و مباحث تخصصی	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲	۱۴۰۳	۱۴۰۴	۱۴۰۵	مجموع	درصد فراوانی
	T_1, T_2, T_3 و نرمال								
۸.۴	پیوستگی، همومورفیسم و همگرایی دنباله/تورها	۱	۱	۲	۱	۱	۰	۶	۱.۳۳٪
۸.۵	توپولوژی حاصل ضربی و قضایای تیخونوف	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۴	۰.۸۹٪
۹	آنالیز حقیقی ۱	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۶۰	۱۳.۳۳٪
۹.۱	جبرها، سیگما-جبرها و اندازه خارجی کاراتودوری	۲	۳	۱	۱	۲	۱	۱۰	۲.۲۲٪
۹.۲	مجموعه و تابع کانتور، اندازه لبگ و مجموعه بورل	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۱۱	۲.۴۴٪
۹.۳	توابع اندازه پذیر و انتگرال لبگ	۱	۱	۱	۱	۱	۲	۷	۱.۵۶٪
۹.۴	قضایای همگرایی، قضایای حدی و مشتق گیری	۲	۱	۲	۲	۲	۲	۱۱	۲.۴۴٪
۹.۵	فضاهای L^p ، فضاهای بازخا/هیلبرت و تابعهای خطی	۳	۳	۴	۴	۳	۳	۲۱	۴.۶۷٪
۱۰	جبر پیشرفته ۱	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۶۰	۱۳.۳۳٪
۱۰.۱	مدولهای آرتینی و نوتری	۲	۱	۱	۱	۱	۲	۸	۱.۷۸٪
۱۰.۲	مدولهای پروژکتیو، اینژکتیو، بخش پذیر و یکدست	۲	۲	۳	۱	۳	۲	۱۳	۲.۸۹٪
۱۰.۳	رادیکالها (جیکوسن، نیل رادیکال) و لم ناکایاما	۲	۱	۱	۲	۲	۲	۱۰	۲.۲۲٪

ردیف	نام حوزه اصلی و مباحث تخصصی	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲	۱۴۰۳	۱۴۰۴	۱۴۰۵	مجموع	درصد فراوانی
۱۰.۴	ضرب تانسوری، دنباله‌های دقیق و فانکتور Hom	۲	۳	۲	۲	۳	۳	۱۵	۳.۳۳٪
۱۰.۵	نظریه حلقه‌های پیشرفته و ساختارهای مدولی خاص	۲	۳	۳	۴	۱	۱	۱۴	۳.۱۱٪
۱۱	بهینه‌سازی خطی پیشرفته ۱ و آنالیز عددی پیشرفته	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۶۰	۱۳.۳۳٪
۱۱.۱	ساختار ماتریسی سیمپلکس و تحلیل تغییرات	۲	۱	۱	۲	۲	۱	۹	۲.۰۰٪
۱۱.۲	قضایای دوگانگی، مکمل زائد و تحلیل حساسیت	۳	۳	۴	۲	۳	۲	۱۷	۳.۷۸٪
۱۱.۳	مسائل جریان شبکه‌ای، حمل و نقل و روش‌های دوفازی	۱	۱	۱	۲	۱	۲	۸	۱.۷۸٪
۱۱.۴	اسپلاین‌ها، توابع برنولی و کوادراتورهای تعمیم‌یافته	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۱۱	۲.۴۴٪
۱۱.۵	تقریب حداقل مربعات، هرمیت و چندجمله‌ای‌های متعامد	۲	۳	۲	۲	۲	۳	۱۵	۳.۳۳٪
۱۲	اصول آموزش ریاضی	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۶۰	۱۳.۳۳٪
۱۲.۱	نظریه‌های یادگیری، روانشناسی شناختی و مفاهیم اسکمپ	۳	۲	۲	۲	۲	۲	۱۳	۲.۸۹٪
۱۲.۲	تحولات تاریخی برنامه‌های درسی (ریاضی جدید، بازگشت به اصول)	۲	۳	۲	۲	۲	۲	۱۳	۲.۸۹٪

ردیف	نام حوزه اصلی و مباحث تخصصی	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲	۱۴۰۳	۱۴۰۴	۱۴۰۵	مجموع	درصد فراوانی
۱۲.۳	رویکردهای نوین (RME، حل مسئله، تفکر محاسباتی و هوش مصنوعی)	۲	۱	۳	۲	۲	۲	۱۲	۲.۶۷٪
۱۲.۴	روش‌شناسی پژوهش در آموزش ریاضی (اقدام‌پژوهی، درس‌پژوهی)	۱	۲	۱	۲	۲	۲	۱۰	۲.۲۲٪
۱۲.۵	جامعه‌شناسی، فرهنگ، ارزش‌ها و نهادهای بین‌المللی (بیشاپ، ICMI)	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۱۲	۲.۶۷٪
جمع	مجموع کل سوالات هر سال	۷۵	۷۵	۷۵	۷۵	۷۵	۷۵	۴۵۰	۱۰۰٪

گزارش تحلیلی و توصیه‌های راهبردی داوطلبان

۱. تحلیل روندها و تغییرات ساختاری دفترچه

- ثبات سهم دروس در سال‌های اخیر: از سال ۱۴۰۳ با تغییر در ساختار چینش دفترچه کارشناسی، بخش مشترک دروس تحلیلی/کاربردی شامل ۱۰ سوال شد (۴ سوال مبانی آنالیز عددی، ۳ سوال مبانی احتمال و ۳ سوال بهینه‌سازی خطی).
- ارتقای جایگاه جبر همولوژی و ساختارهای تانسوری: در درس جبر پیشرفته ۱، تمرکز طراحان از قضایای محض شمارش حلقه‌ها به سمت خواص کانگوریکال، رفتار فانکتورهای Hom و ضرب تانسوری ($\otimes$) و لم ناکایاما تغییر یافته است.
- جهت‌گیری تحلیلی در بهینه‌سازی خطی پیشرفته: وزن سوالات بر قضایای دوگانگی، شروط مکمل زائد و تحلیل ماتریسی تغییرات در جداول بهینگی افزایش یافته و نیاز به تسلط تحلیلی به جای محاسبات طولانی عددی کاملاً مشهود است.

۲. معرفی مباحث کلیدی و پرتکرار

- مبانی آنالیز ریاضی و آنالیز حقیقی ۱: تسلط بر خواص فضاهای L^p ، قضیه تجدید آرایش ریمان در سری‌های مشروط، قضایای همگرایی (همگرایی نقطه وار در برابر همگرایی در اندازه و قضایای همگرایی تسلطی لبگ) بیشترین سهم سوالات را به خود اختصاص داده‌اند.
- مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی: قضایای بنیادی ابعاد و فضای پوچی (فرمول گراسمان)، خواص مقادیر ویژه ماتریس‌های متقارن/پادمتقارن و قضیه کیلی-همیلتون هسته ثابت آزمون هستند.
- توپولوژی عمومی: ارتباط میان فضاهای هاسدورف، مفهوم فشردگی و اصول جداسازی پایه‌ای، اولویت قطعی در زمان مطالعه است.
- اصول آموزش ریاضی: مؤلفه‌های نظریه اسکمپ (فهم رابطه‌ای و ابزاری)، دیدگاه‌های آلن بیشاپ در فرهنگ و ارزش‌ها، و ادوار تحولی برنامه‌های درسی (ریاضیات جدید و بازگشت به اصول) همواره تکرار می‌شوند.

مقدمه تحلیلی و نقشه راه استراتژیک آزمون دکترای تخصصی ریاضی (بررسی روند ۶ ساله ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۵)

آزمون ورودی دوره دکترای تخصصی (D.Ph) رشته ریاضی (کد ۲۲۳۳) در سه گرایش «ریاضی محض»، «ریاضی کاربردی» و «آموزش ریاضی»، یکی از عمیق‌ترین و مفهومی‌ترین ماراتن‌های علمی کشور است. بررسی دقیق و کالبدشکافی ۴۵۰ سؤال مطرح‌شده در شش دوره متوالی (از سال ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۵) نشان می‌دهد که این آزمون دیگر صرفاً محکی برای سنجش محفوظات یا مهارت‌های محاسباتی روتین نیست؛ بلکه ابزاری هوشمندانه برای ارزیابی «شهود ریاضی»، «تسلط بر شرایط مرزی قضایا»، «توانایی ساخت مثال‌های نقض (Counterexamples)» و «درک پیوندهای میان‌رشته‌ای» در ذهن داوطلبان است. تدوین این مقدمه تحلیلی در طلیعه کتاب، با هدف ارائه یک دیدگاه استراتژیک به داوطلبان گرامی صورت گرفته است تا پیش از ورود به مطالعه تفصیلی پاسخ‌نامه‌ها و درسنامه‌ها، با معماری ذهنی طراحان سؤال و قواعد حاکم بر این آزمون آشنا شوند.

۱. تحلیل روند تحولات ساختاری و تغییر پارادایم طراحی سؤالات (۱۴۰۰ تا ۱۴۰۵)

واکاوی تطبیقی سؤالات شش سال اخیر، بیانگر یک تغییر پارادایم (Paradigm Shift) آشکار در رویکرد طراحان سازمان سنجش است که می‌توان آن را در چهار محور زیر خلاصه کرد:

- **گذار از محاسبات جبری طولانی به تحلیل‌های کیفی و ساختاری:** در آزمون‌های سال‌های ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱، بخشی از سؤالات (به‌ویژه در دروسی نظیر جبر خطی، آنالیز عددی و احتمال) نیازمند انجام محاسبات دستی و جبری نسبتاً طولانی بود. اما از سال ۱۴۰۲ به بعد و به‌ویژه در آزمون‌های ۱۴۰۴ و ۱۴۰۵، وزن سؤالات به سمت «تحلیل‌های بدون محاسبه و مبتنی بر ناوردهای ساختاری» چرخش یافته است. برای نمونه، در جبر خطی به جای محاسبه مستقیم توان‌های ماتریس، استفاده از قضیه کیلی-همپلتون و خواص طیفی ماتریس‌های متقارن و پادمقارن محوریت یافته است و در بهینه‌سازی خطی، به جای تشکیل کامل جداول سیمپلکس، استنتاج جواب از طریق هندسه چندوجهی‌ها و شرایط مکمل زائد (Complementary Slackness) مد نظر طراحان قرار گرفته است.
 - **شکار شرایط مرزی قضایا (Boundary Conditions):** در سال‌های اخیر، طراحان به جای پرسش از صورت استاندارد قضایا، دقیقاً دست روی نقطه‌ای می‌گذارند که با حذف یکی از فروض قضیه، حکم آن فرو می‌ریزد. حذف شرط «متناهی بودن اندازه فضا» ($\mu(X) < \infty$) در بررسی رابطه همگرایی نقطه‌وار و همگرایی در اندازه (در آنالیز حقیقی)، حذف شرط «متناهی‌المولد بودن مدول» در اعمال لم ناکایاما (در جبر پیشرفته)، یا برداشتن شرط «فشردگی دامنه» در بررسی پیوستگی یکنواخت (در مبانی آنالیز) از جمله تله‌های تکرارشونده‌ای هستند که داوطلبان فاقد دید تحلیلی را به دام می‌اندازند.
 - **سؤالات چندگزاره‌ای و سنجش هم‌ارزی‌های منطقی:** در آزمون‌های ۱۴۰۳ تا ۱۴۰۵، الگوی سؤالات به سمت طرح چهار گزاره نزدیک به هم که تنها در یک قید ظریف (مانند تفاوت توپولوژی حاصل‌ضربی و جعبه‌ای، یا تفاوت سیگما-جبر بول و لبگ) با یکدیگر تمایز دارند، حرکت کرده است. این امر نیازمند مسلح بودن داوطلب به «جعبه ابزار مثال‌های نقض استاندارد» است تا بتواند در کسری از دقیقه، گزینه‌های نادرست را ابطال کند.
 - **تغییر رویکرد در درس اصول آموزش ریاضی از کلی‌گویی به متون مرجع و روش‌شناسی انتقادی:** در حالی که سؤالات سال‌های ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۲ بیشتر بر تعاریف پایه، سازمان‌های بین‌المللی و تاریخچه کلی تمرکز داشت، در آزمون‌های ۱۴۰۴ و ۱۴۰۵ شاهد چرخش جدی به سمت «نقد روش‌شناسی پژوهش در آموزش ریاضی»، «تأثیرات فلسفه ریاضی (افلاطون‌گرایی، صورت‌گرایی، ساخت‌گرایی) بر برنامه درسی» و تحلیل عمیق آرای متفکران خاصی همچون کلمنتس و الرتون بوده‌ایم.
۲. کالبدشکافی مباحث کلیدی و همواره پرتکرار (ستون‌های فقرات آزمون)
- بر اساس جداول توزیع فراوانی مستخرج از شش دوره آزمون، در هر درس مباحثی وجود دارند که بدون استثنا یا با احتمال نزدیک به یقین، هر ساله پای ثابت سؤالات بوده‌اند و مطالعه آن‌ها بالاترین بازدهی (ROI) را برای داوطلب به همراه دارد:
- **در حوزه علوم ریاضی، جبر خطی و مبانی جبر:** مبحث «حساب کاردینال‌ها و اعداد اصلی ترامتناهی (به‌ویژه فرض پیوستار و جبر توان‌های $\aleph_c$ و $\aleph$)»، «رابطه‌های هم‌ارزی و افزاز»، «قضیه ابعاد (فرمول گراسمان) و تبدیلات خطی روی فضای چندجمله‌ای‌ها و ماتریس‌ها»، «چندجمله‌ای مشخصه و مینیمال»، «ساختار گروه‌های متقارن (S_n) و زوجیت جایگشت‌ها» و «ایده‌آل‌های اول، ماکسیمال و عناصر خودتوان در حلقه‌های خارج‌قسمتی و ماتریسی» ستون‌های اصلی سؤالات را تشکیل می‌دهند.
 - **در حوزه آنالیز (مبانی آنالیز، توپولوژی و آنالیز حقیقی ۱):** تسلط بر «همگرایی دنباله‌ها و سری‌های عددی و توابع»، «شروط کافی برای پیوستگی یکنواخت در دامنه‌های بیکران»، «اصول جداسازی T_1 و هاوسدورف T_2 » و ارتباط آن‌ها با بستر، قطر فضا و همگرایی تورها، «فشردگی و موضعاً فشردگی»، «ساختار اندازه خارجی کاراتئودوری»، «روابط شمول در فضاهای L^p و ℓ^p » و «تابع‌های خطی کراندار و قضایای فضاهاى باناخ و هیلبرت» بیشترین سهم را به خود اختصاص داده‌اند.
 - **در حوزه جبر پیشرفته ۱:** چهار ضلع طلایی این درس عبارت‌اند از: «شروط زنجیره‌ای آرتینی و نوتری (به‌ویژه روی ساختارهای کلاسیک مانند Q/Z ، گروه پروفر Z_p^∞ و حلقه‌های چندجمله‌ای)»، «مدول‌های پروژکتیو، اینژکتیو، بخش‌پذیری و محک بئر»، «رادیکال جیکوبسن $J(R)$ ، نیل‌رادیکال و کاربرد لم ناکایاما» و «رفتار فانکتورهای ضرب تانسوری $(\otimes)$ و Hom » در قبال دنباله‌های دقیق و جمع‌ضرب مستقیم.

- در حوزه ریاضی کاربردی (آنالیز عددی و بهینه‌سازی خطی): در آنالیز عددی، «تعیین مرتبه همگرایی روش‌های تکراری و نیوتن-رافسون (تک‌متغیره و دستگاه)»، «درون‌یابی نیوتن، هرमित و اسپلاین‌ها»، «فرمول‌های خطای سیمپسون و کوادراتورهای گاوسی (لژاندر، هرमित، لاگور و چیشیف)» و «مسئله کمترین مربعات و تجزیه‌های ماتریسی» در صدر تکرارها قرار دارند. در بهینه‌سازی خطی (مبانی و پیشرفته)، «قضایای دوگانگی قوی و ضعیف»، «شرایط مکمل زائد»، «تحلیل حساسیت پارامتریک (تغییر بردار هزینه c و منابع b)» و «تشخیص بیکرانی و تباهیدگی در روش‌های دوفازی و M بزرگ» بیشترین بسامد را دارا هستند.

۳. بسامد نام اشخاص، قضایا، ساختارها و نظریه‌پردازان در سؤالات ۶ ساله

یکی از جذاب‌ترین ابعاد تحلیل آماری آزمون دکتری ریاضی، رصد نام قضایا، توابع خاص و شخصیت‌های علمی است که بیشترین تکرار را در متن سؤالات یا در هسته اثبات آن‌ها داشته‌اند:

- در دروس آموزش ریاضی (شخصیت‌ها و نظریه‌پردازان پرتکرار): ۱. آلن بیشاپ (Alan Bishop): پرتکرارترین چهره در تاریخ آزمون‌های دکتری آموزش ریاضی است که تقریباً هر سال (۱۴۰۱، ۱۴۰۲، ۱۴۰۳، ۱۴۰۴ و ۱۴۰۵) سؤالی مستقیم درباره دیدگاه او پیرامون «فرهنگ و ارزش‌ها در برنامه درسی»، به چالش کشیدن «زبان بین‌المللی بودن ریاضی» و ویژگی‌های پژوهش در آموزش ریاضی مطرح شده است. ۲. ریچارد اسکمپ (Richard Skemp): نظریه‌پرداز برجسته روان‌شناسی آموزش ریاضی که مفاهیم «درک رابطه‌ای (Relational Understanding) در برابر درک ابزاری (Instrumental Understanding)» و «یادگیری هوشمند» او در سال‌های ۱۴۰۰، ۱۴۰۱، ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳ مستقیماً مورد پرسش قرار گرفته است. ۳. کلمنتس و الرتون (Ellerton & Clements): در آزمون‌های اخیر (به‌ویژه ۱۴۰۴ و ۱۴۰۵) بیشترین تمرکز طراحان بر آرای انتقادی این دو پژوهشگر پیرامون «نقد آزمون‌های کتبی سنتی (ریشه در سنت‌های چین)»، «نقد رویکرد مکانیکی آزمون‌های معناداری آماری» و «ضرورت اقدام پژوهی با مشارکت معلمان» بوده است. ۴. هانس فرودنتال (Hans Freudenthal): بنیان‌گذار رویکرد «آموزش ریاضیات واقعیت‌مدار (RME)» که تلفی او از ریاضی به عنوان یک «فعالیت انسانی (Human Activity)» و نقد او بر جنبش ریاضی جدید، در سال‌های ۱۴۰۱، ۱۴۰۲، ۱۴۰۳ و ۱۴۰۵ تکرار شده است. ۵. آلن شونفیلد (Alan Schoenfeld) و ویلیام هیگنسون (Higginson): ابعاد پنج‌گانه «تدریس قدرتمند ریاضی» شونفیلد و «مدل چهاروجهی» هیگنسون (ریاضی، فلسفه، روان‌شناسی، جامعه‌شناسی) نیز از دیگر محورهای پرتکرار بوده‌اند.

- در دروس ریاضی محض و کاربردی (قضایا و ساختارهای محک پرتکرار):

- مجموعه کانتور (Cantor Set) و توابع دیریکله و تومه (پاپ‌کورن): پرتکرارترین ساختارها در دروس آنالیز حقیقی، مبانی آنالیز و توپولوژی هستند که برای سنجش مفاهیم اندازه لبگ صفر، مجموعه‌های بورل غیرلبگ، ناپیوستگی، انتگرال‌پذیری ریمان-لبگ و فشردگی ناهمبند به کار رفته‌اند.
- گروه پروفر (Z_p^∞) و مدول Q/Z : کلیدی‌ترین ساختارها در جبر پیشرفته که هر ساله برای آزمون مفاهیم بخش‌پذیری، اینژکتیو بودن، پیچش (Torsion)، ضرب تانسوری و شروط زنجیره‌ای آرتینی و نوتری حضور دارند.
- قضایای نام‌دار با بسامد بالا: «لم زرن و اصل انتخاب» (مبانی علوم ریاضی)، «قضیه کیلی-همیلتون و فرمول گراسمان» (جبر خطی)، «قضیه تجدید آرایش ریمان و هاینه-کانتور» (مبانی آنالیز)، «قضیه تیخونوف و هاینه-بورل» (توپولوژی)، «لم فاتو، قضیه همگرایی تسلطی لبگ (DCT) و کاراتئودوری» (آنالیز حقیقی)، «لم ناکایاما و محک بئر» (جبر پیشرفته) و «لم فارکاش و قضیه نمایش مینکوفسکی-وایل» (بهینه‌سازی خطی).

۴. توصیه‌های راهبردی برای مطالعه بهینه این کتاب

بر مبنای این تحلیل جامع، به داوطلبان گرامی توصیه می‌شود برای کسب بالاترین درصد ممکن در جلسه آزمون، مطالعه این مجموعه را بر اساس استراتژی سه‌مرحله‌ای زیر تنظیم نمایند: ۱. تسلط بر «درسنامه‌های مروری» و «جداول کپسولی»: پیش از حل تست‌ها، درسنامه‌های هدفمند کتاب را که دقیقاً بر مبنای سرفصل‌های پرتکرار ۶ سال اخیر مهندسی شده‌اند مطالعه فرمایید تا ساختار درختی هر درس در ذهنتان شکل بگیرد. ۲. تمرکز ویژه بر بخش «راه‌حل تستی» و «تله‌های آزمون»: در پاسخ‌نامه تشریحی این کتاب، علاوه بر اثبات‌های دقیق و آکادمیک، برای هر سؤال یک «راه‌حل تستی (میانبر)» و تحلیل «تله طراح» ارائه شده است. یادگیری تکنیک‌های حذف گزینه از طریق تقارن، بررسی حالات حدی و به کارگیری مثال‌های نقض طلایی، زمان پاسخ‌گویی شما را به زیر ۳۰ ثانیه کاهش می‌دهد. ۳. مطالعه تطبیقی و شرطی‌سازی سؤالات (What-If Analysis): هنگام بررسی هر تست از آزمون‌های ۱۴۰۴ و ۱۴۰۵، به بخش «تحلیل شرایط مرزی» دقت کنید و از خود بپرسید اگر یکی از فروض سؤال تغییر می‌کرد، کدام گزینه صحیح می‌شد. این دقیقاً همان روشی است که طراحان برای خلق سؤالات سال آینده به کار خواهند گرفت.

امید است این اثر جامع، چراغ راهی روشن برای تمامی پژوهندگان و داوطلبان گرامی در مسیر دستیابی به قله‌های رفیع علم ریاضی باشد.

پیش‌گفتار

آزمون ورودی دوره دکتری تخصصی (Ph.D) رشته ریاضی با کد ۲۲۳۳، از معتبرترین و سرنوشت‌سازترین سنجش‌های علمی تحصیلات تکمیلی در نظام آموزش عالی کشور است که ارزیابی جامع شایستگی‌های تحلیلی داوطلبان را در سه گرایش اصلی «ریاضی محض»، «ریاضی کاربردی» و «آموزش ریاضی» بر عهده دارد. کتاب حاضر، با تکیه بر بررسی و پردازش موشکافانه پرسش‌های آزمون دکتری ریاضی در یک دوره شش‌ساله (از سال ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۵)، اثری نظام‌مند و تحلیلی در عرصه نشر دانشگاهی است که ضمن پوشش کامل تمامی مباحث و دروس دوازده‌گانه امتحانی، پاسخ تشریحی جامع سوالات دوره‌های ۱۴۰۴ و ۱۴۰۵ را در قالب یک مدل آموزشی نوین و چندلایه سامان داده است.

۱. رویکرد بنیادین و ضرورت تدوین اثر

تحلیل تطبیقی سوالات ۶ سال گذشته نشان می‌دهد که الگوی طراحی آزمون دکتری ریاضی دستخوش یک چرخش اساسی شده است؛ رویکرد طراحان از سنجش محاسبات طولانی، فرسایشی و مبتنی بر محفوظات، به سوی ارزیابی «شهود ریاضی»، «تسلط بر شرایط مرزی قضایا»، «به‌کارگیری سریع مثال‌های نقض استاندارد» و «درک پیوندهای ساختاری میان‌رشته‌ای» معطوف شده است. در چنین بستری، اتکا به شیوه‌های سنتی حل مسئله و مطالعه پراکنده پاسخ‌نامه‌های کلیدی، پاسخگوی نیاز داوطلبان برای رقابت در این آزمون نیست. کتاب حاضر با این هدف راهبردی تدوین گردیده است که فراتر از یک گردآوری صرف، همچون یک «نقشه راه و کارگاه آموزشی فعال» عمل کند؛ اثری که به داوطلب می‌آموزد چگونه در مواجهه با صورت مسئله، لایه‌های پنهان مفهومی را شناسایی کرده، تله‌های طراحی‌شده را رمزگشایی نماید و با بهره‌گیری از میان‌برهای ساختاری، در کمترین زمان ممکن به پاسخ دقیق دست یابد.

۲. پوشش سرفصل‌ها و تفکیک گرایش‌های تخصصی

این مجموعه آموزشی تمامی ۱۲ ماده درسی مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری را در دو مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد، هم‌راستا با دفترچه‌های استاندارد ۷۵ سوالی سازمان سنجش پوشش می‌دهد:

۱. **دروس پایه کارشناسی:** مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی، مبانی احتمال و بهینه‌سازی خطی.
۲. **دروس تخصصی کارشناسی:** مبانی جبر و توپولوژی عمومی.
۳. **دروس تحصیلات تکمیلی (کارشناسی ارشد):** آنالیز حقیقی ۱، جبر پیشرفته ۱، بهینه‌سازی خطی پیشرفته ۱ به همراه آنالیز عددی پیشرفته، و اصول آموزش ریاضی.

با توجه به دفترچه‌های امتحانی سازمان سنجش، این اثر نیازهای داوطلبان هر سه گرایش تخصصی را به طور جامع برآورده می‌سازد:

- **گرایش ریاضی محض:** متمرکز بر درک عمیق ساختارهای جبری، توپولوژی، قضایای اندازه و آنالیز تابعی، نظریه مدول‌ها و جبر همولوژی.
- **گرایش ریاضی کاربردی:** متمرکز بر روش‌های تجزیه ماتریسی، پایداری الگوریتم‌ها، کوادراتورهای تعمیم‌یافته، تقریب‌های عددی، نظریه دوگانگی، برنامه‌ریزی خطی و تحلیل حساسیت.
- **گرایش آموزش ریاضی:** متمرکز بر روانشناسی شناختی آموزش ریاضی، تاریخ برنامه درسی، نظریه‌های یادگیری، روش‌شناسی تحقیق، جامعه‌شناسی و ابعاد فرهنگی ریاضیات.

۳. معماری روش‌شناختی و اسکلت تحلیلی اثر

هر یک از فصول و مباحث ارائه‌شده در این کتاب، مبتنی بر یک ساختار آموزشی چهاربخشی طراحی شده است:

- **پاسخ تشریحی و آکادمیک:** ارائه اثبات‌های گام‌به‌گام و منطبق بر مراجع مرجع دانشگاهی، برای تثبیت مبانی تئوریک در ذهن پژوهشگر.
- **راه‌حل تستی و میان‌بر ساختاری:** تحلیل بدون محاسبه مستقیم، بر پایه ناوردهای جبری، نگاشت‌های طیفی مقادیر ویژه، تقارن در توزیع‌ها و هندسه چندوجهی‌ها، جهت رسیدن به پاسخ در کمتر از ۳۰ ثانیه.
- **شکار تله‌های آزمون و خطاهای شناختی:** بررسی دقیق شیطنتهای طراحان در برهم زدن تقارن گزینه‌ها، شبیه‌سازی مغالطات گزاره‌ای و جاگذاری گزینه‌های گمراه‌کننده.
- **تحلیل شرایط مرزی (What-If Analysis):** کالبدشکافی وضعیت مسئله در صورت حذف، تضعیف یا تغییر فروض قضیه (مانند حذف شرط تناهی اندازه فضا یا متناهی‌المولد بودن مدول)؛ رویکردی که ذهن داوطلب را برای پرسش‌های دوره‌های بعد واکسینه می‌کند.

- **درسنامه‌های مروری کپسولی و جداول مقایسه‌ای:** در پایان هر مبحث، چکیده‌ای منسجم و فرمول‌بندی‌شده از قضایای کلیدی، ویژگی‌ها و روابط ساختاری گنجانده شده است تا فرآیند بازخوانی را در کوتاه‌ترین زمان میسر سازد.

۴. جدول فراوانی موضوعی ۶ ساله و نقشه راه استراتژیک

در آغاز کتاب، یک جدول توزیع فراوانی موضوعی مستخرج از ۴۵۰ سوال دوره‌های ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۵ تدوین شده است که سهم و وزن هر زیرمبحث را بر حسب درصد فراوانی در معرض دید داوطلب قرار می‌دهد. این جدول نشان می‌دهد که کدام سرفصل‌ها (نظیر فضاهای L^p در آنالیز حقیقی، قضایای دوگانگی در بهینه‌سازی، شروط زنجیره‌ای در جبر پیشرفته و نظریه اسکمپ و بیشاپ در آموزش ریاضی) از بسامد بالایی برخوردارند و اولویت مطالعه را تعیین می‌کنند. به پیوست این جدول، «مقدمه تحلیلی و نقشه راه استراتژیک» به بررسی تغییرات سبک سوالات، بررسی دوره‌های تاریخی آزمون و بسامد اسامی متفکران و ساختارهای نامدار پرداخته است.

۵. ضمایم هفت‌گانه استراتژیک کتاب

به منظور بی‌نیاز ساختن داوطلب از یادداشت‌برداری‌های متفرقه و ایجاد آمادگی در روزهای پایانی، بخش پایانی کتاب شامل **هفت ضمیمه راهبردی** است:

۱. اطلس جامع مثال‌های نقض طلایی و ساختارهای محک (Counterexamples Atlas):

فضاهای محک نظیر تابع تومه، دیریکله، کانتور، دنباله توده فرار، توپولوژی متمم متناهی، مدول Q/Z و گروه پروفِر Z_p^∞ جهت رد زیر ۱۰ ثانیه‌ای گزینه‌ها.

۲. دیاگرام‌های درختی استلزام و شمول: فلوچارت‌های ارتباط انواع همگرایی‌ها، شمول فضاهای L^p و ℓ^p ، سلسله‌مراتب ساختارهای حلقه‌ای و مدولی، و درخت اصول جداسازی توپولوژی.

۳. کپسول فرمول‌های سریع و محاسبات عددی-احتمال: روابط خطای انتگرال‌گیری سیمپسون، جدول چندجمله‌ای‌های متعامد (لژاندر، هرمیت، لاگور، چیشف)، کوادراتورهای گاوسی، اتحادهای ترکیبیاتی و فرمول‌های جهش سیمپلکس.

۴. ماتریس تقارن قضایای دوگانگی و مکمل زائد: جداول تبدیل اولیه به دوگان، جدول استخراج فوری متغیرهای دوگان بدون حل جدول، و تحلیل امکان‌پذیری حالات سه‌گانه مدل‌ها.

۵. فرهنگ رجال، پارادایم‌ها و خط زمانی آموزش ریاضی: شرح آرا و کلیدواژه‌های اختصاصی چهره‌های پرتکرار (بیشاپ، اسکمپ، فرودنتال، شونفیلد، کلمنتس و الزتون) و خط زمانی تحولات برنامه‌های درسی از ۱۹۰۸ تا استانداردهای نوین.

۶. واژه‌نامه تخصصی اصطلاحات تطبیقی (انگلیسی-فارسی): معادل‌یابی اصطلاحات چندگانه و متداول طراحان در مباحث مدول‌ها، توپولوژی و بهینه‌سازی برای رفع ابهام در جلسه آزمون.

۷. راهنمای مدیریت زمان و منابع مرجع: راهنمای تقسیم زمان ۱۳۵ دقیقه‌ای در جلسه آزمون به تفکیک گرایش‌ها، تکنیک‌های مهندسی معکوس، و معرفی منابع استاندارد دانشگاهی به همراه راهنمای موفقیت در مصاحبه دکتری.

امید است این کتاب بتواند به عنوان یک همراه معتمد، نقشه راهی مطمئن و اثری ماندگار، بستر ساز موفقیت و دستیابی به قله‌های رفیع پژوهش برای جامعه علمی، نخبگان و پویندگان دانش ریاضیات در مقطع دکتری تخصصی باشد.

گروه مولفین پردازش

پاییز ۱۴۰۵

آزمون دکترای ریاضی ۱۴۰۴

مبانی علوم ریاضی



۱. درستی گزاره $r \rightarrow (p \vee \sim q)$ ، درستی کدام گزاره را نتیجه نمی‌دهد؟ (نماد $\sim$ به مفهوم نقیض است).
 - (۱) $r \rightarrow p$
 - (۲) $r \vee \sim p$
 - (۳) $p \wedge q \rightarrow r$
 - (۴) $\sim r \rightarrow q$
۲. اگر به‌ازای هر $r \in (0, \infty)$ تعریف کنیم $A_r = \left(\frac{1}{r+1}, 2r+1 \right]$ ، مجموعه‌های A_r و $B = \bigcup_{r>0} A_r$ و $A = \bigcap_{r>0} A_r$ کدام است؟
 - (۱) $A = \{1\}$ و $B = (1, \infty)$
 - (۲) $A = (0, 1]$ و $B = (0, \infty)$
 - (۳) $A = \emptyset$ و $B = (1, \infty)$
 - (۴) $A = \{1\}$ و $B = (0, \infty)$
۳. کدام گزینه در مورد رابطه‌های هم‌ارزی درست است؟
 - (۱) هر رده هم‌ارزی در رابطه هم‌ارزی، شامل فقط یک عضو است.
 - (۲) بر روی یک مجموعه دلخواه A ، ممکن است نتوان هیچ رابطه هم‌ارزی تعریف کرد.
 - (۳) هر رابطه هم‌ارزی در مجموعه A ، این مجموعه را به زیرمجموعه‌های ناتپی دو به دو از هم جدا، افراز می‌کند.
 - (۴) اگر R یک رابطه هم‌ارزی در مجموعه A باشد، آنگاه $R \subseteq A \times A$ بی‌تقارن (نامتقارن) است.
۴. کدام گزینه رابطه بین لم زرن و اصل انتخاب را به‌درستی بیان می‌کند؟
 - (۱) لم زرن اکیداً از اصل انتخاب ضعیف‌تر است.
 - (۲) لم زرن و اصل انتخاب معادل هستند.
 - (۳) لم زرن فقط برای مجموعه‌های متناهی جزیی مرتب به‌کار می‌رود.
 - (۴) اصل انتخاب، لم زرن را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن برقرار نیست.
۵. مجموعه $\{ \text{حداکثر تعداد متناهی از جملات دنباله صفر است}, x_n \in \mathbb{R} : D = \{ \{x_n\} \}$ را در نظر بگیرید. عدد اصلی این مجموعه کدام است؟ ($\aleph_0$ عدد اصلی $\mathbb{N}$ و c عدد اصلی $\mathbb{R}$ است).
 - (۱) $\aleph_0$
 - (۲) 2^c
 - (۳) $2^{\aleph_0}$
 - (۴) $\aleph_c$



۱. گزینه ۱)

راه حل تستی:

سریع‌ترین راه برای بررسی استلزام در منطق گزاره‌ها، مقداردهی هوشمندانه به روش «یافتن مثال نقض» است. می‌دانیم فرض یعنی $p \vee q$ درست است. یک حالت بدیهی و نامتقارن انتخاب کنید: فرض کنید p نادرست (F) و q درست (T) باشد (که فرض را ارضا می‌کند).

همین حالت را مستقیماً در گزینه ۱ قرار دهید:

$$\sim (F) \rightarrow \sim (T) \equiv T \rightarrow F \equiv F$$

به دلیل رسیدن به ارزش نادرست، استلزام در همین ۵ ثانیه اول نقض شده و گزینه ۱ به عنوان پاسخ قطعی انتخاب می‌شود؛ نیازی به بررسی سایر گزینه‌ها نیست.

پاسخ تشریحی:

مفاهیم پایه و هم‌ارزی‌های منطقی بررسی و اعمال شدند. می‌دانیم گزاره شرطی $a \rightarrow b$ با $\sim a \vee b$ هم‌ارز است:

گزینه ۲: $\sim p \rightarrow q \equiv \sim (\sim p) \vee q \equiv p \vee q$

گزینه ۳: $\sim q \rightarrow p \equiv \sim (\sim q) \vee p \equiv q \vee p \equiv p \vee q$

گزینه ۴: طبق قوانین دمورگان، $\sim (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim (\sim p) \vee \sim (\sim q) \equiv p \vee q$

گزینه ۱: $\sim p \rightarrow \sim q \equiv \sim (\sim p) \vee \sim q \equiv p \vee \sim q$. گزاره $p \vee q$ لزوماً این عبارت را نتیجه نمی‌دهد.

راه حل تستی:

طراح با استفاده از شباهت ظاهری قانون عکس‌نقیض (Contrapositive) قصد فریب داشته است. عکس‌نقیض گزاره $p \vee q$ (که معادل $\sim p \rightarrow q$ است) برابر با $\sim q \rightarrow \sim p$ است، نه $\sim p \rightarrow \sim q$. گزینه ۱ در حقیقت بازتاب مغالطه وارون است.

جدول ارزش (Truth Table) مینیمال:

$\sim p \rightarrow \sim q$ (گزینه ۱)	$p \vee q$ (فرض)	q	p
T	T	T	T
T	T	F	T
F (نقض استلزام)	T	T	F
T	F	F	F

۲. گزینه ۴)

راه حل تستی:

برای یافتن سریع اشتراک و اجتماع در خانواده‌ای از مجموعه‌ها، بررسی رفتار حدی کران‌های بازه بسیار راهگشا است:

• برای اشتراک (A): وقتی $r \rightarrow 0^+$ کران پایین بازه یعنی $\frac{1}{r+1} \rightarrow 1^-$ و کران بالای آن $r+1 \rightarrow 1^+$ میل می‌کند. با کوچک شدن r ، بازه به دور نقطه ۱ منقبض می‌شود. پس تنها عضو مشترک در تمام بازه‌ها عدد ۱ است ($A = \{1\}$).

• برای اجتماع (B): وقتی $r \rightarrow \infty$ کران پایین بازه $\frac{1}{r+1} \rightarrow 0^+$ و کران بالای آن $r+1 \rightarrow \infty$ میل می‌کند. بنابراین بازه منبسط شده و کل بازه $(0, \infty)$ را پوشش می‌دهد ($B = (0, \infty)$). با این تحلیل چشمی در کمتر از ۱۵ ثانیه گزینه ۴ تأیید می‌شود.



پاسخ تشریحی:

فرض کنید $A_r = \left(\frac{1}{r+1}, r+1\right)$ برای هر $r > 0$.

۱. اثبات اشتراک $(A = \bigcap_{r>0} A_r)$:

• نشان می‌دهیم $1 \in A$: برای هر $r > 0$ ، بدیهی است که $0 < \frac{1}{r+1} < 1$ و $1 < r+1$. پس برای هر $r > 0$ داریم $1 \in A_r$.

• نشان می‌دهیم هیچ $x \neq 1$ در اشتراک نیست:

○ اگر $x > 1$ می‌توان $r > 0$ را به قدری کوچک انتخاب کرد که $r+1 \leq x$ (کافی است $1 \leq x - r$ باشد). برای این $x \notin A_r$.

○ اگر $x < 1$ می‌توان $r > 0$ را به قدری کوچک انتخاب کرد که $\frac{1}{r+1} \geq x$ (کافی است $1 - \frac{1}{r+1} \leq x$ باشد). برای این $x \notin A_r$.

بنابراین اثبات شد که $A = \{1\}$.

۲. اثبات اجتماع $(B = \bigcup_{r>0} A_r)$:

• بدیهی است که برای هر $r > 0$ ، $A_r \subseteq (0, \infty)$ پس $B \subseteq (0, \infty)$.

• برای اثبات احتوا در جهت عکس، فرض کنید $x \in (0, \infty)$ نشان می‌دهیم $r > 0$ وجود دارد که $x \in A_r$.
○ اگر $x \geq 1$ کافی است r را به قدری بزرگ بگیریم که $r+1 > x$ (مثلاً $r = x$). در این حالت

$$x \in A_r \text{ پس } \frac{1}{r+1} < 1 \leq x < r+1$$

○ اگر $0 < x < 1$ کافی است r را به قدری بزرگ بگیریم که $\frac{1}{r+1} < x$ (یعنی $\frac{1}{x} < r+1$ یا $r > \frac{1}{x} - 1$). در

$$x \in A_r \text{ پس } \frac{1}{r+1} < x < 1 < r+1$$

بنابراین اثبات شد که $B = (0, \infty)$.

راه حل تستی:

طراح در گزینه ۳ با استفاده از مفهوم اشتباه قرار دادن $r = 0$ در بازه، بازه باز $(1, 1) = \emptyset$ را تداعی کرده است. در حالی که دامنه تعریف خانواده مجموعه‌ها $r \in (0, \infty)$ است و حد منتهی‌الیه بازه‌ها نباید با جایگذاری مستقیم اشتباه گرفته شود. همچنین گزینه ۱ برای داوطلبانی طراحی شده که رفتار بسط یافته بازه را برای $r \rightarrow \infty$ در نظر نمی‌گیرند و در نیمه راه متوقف می‌شوند.

گزینه ۳. ۳.

راه حل تستی:

مستقیماً به سراغ قضیه اساسی روابط هم‌ارزی بروید. گزینه ۳ دقیقاً بیانگر این قضیه کلاسیک است. برای رد سریع سایر گزینه‌ها:

- رد گزینه ۱: اگر همه انسان‌ها را بر اساس ماه تولد هم‌ارز بدانیم، هر رده هزاران عضو دارد.
- رد گزینه ۲: رابطه تساوی ($x = y$) روی هر مجموعه دلخواهی، همواره یک رابطه هم‌ارزی تولید می‌کند.
- رد گزینه ۴: رابطه هم‌ارزی ذاتاً «متقارن» است، نه «نامتقارن».

پاسخ در کمتر از ۱۰ ثانیه قفل می‌شود.

پاسخ تشریحی:

قضیه اساسی روابط هم‌ارزی (Fundamental Theorem of Equivalence Relations) مستقیماً بیان می‌دارد که هر رابطه هم‌ارزی روی یک مجموعه، آن را به رده‌های هم‌ارزی مجزا افراز می‌کند.

در اینجا، شرایط سه‌گانه انعکاسی، تقارنی و تعدی در رابطه هم‌ارزی به عنوان مفروضات پایه و اولیه معتبر شناخته و تأیید می‌شوند. با گذر از بسط خطی و میانی ویژگی‌های تقارن و تعدی، مستقیماً به ساختار نهایی و تحول اصلی می‌رسیم: اگر aRb برقرار نباشد،



آنگاه رده‌های هم‌ارزی آن‌ها کاملاً مجزا خواهند بود ($[a] \cap [b] = \emptyset$)، و چون هر عنصر حداقل با خودش در رابطه است ($a \in [a]$)، اجتماع این رده‌های ناتهی، کل مجموعه اصلی را بی‌هیچ نقصی می‌پوشاند که این ساختار، دقیقاً معادل تعریف ریاضی «فراز» (Partition) است.

مثال نقض تلایی (Counterexample):

- رد گزینه ۱: رابطه همنهشتی به پیمانه ۲ روی اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$)، رده هم‌ارزی اعداد زوج شامل بی‌نهایت عضو است ($[0] = \{\dots, -2, 0, 2, \dots\}$).
 - رد گزینه ۲: رابطه همانی (Identity Relation) به فرم $\Delta = \{(x, x) | x \in A\}$ روی هر مجموعه دلخواه A ، همواره موجود و یک رابطه هم‌ارزی است.
 - رد گزینه ۴: اگر R رابطه هم‌ارزی باشد، لزوماً متقارن است (یعنی $xRy \Rightarrow yRx$)، مفهوم بی‌تقارنی (Asymmetry) با تقارن در تضاد مطلق است.
- راه حل تستی:

طراح در گزینه ۴ با استفاده از واژگان متضاد (تقارن در برابر بی‌تقارنی یا پادتقارنی) قصد ایجاد اختلال مفهومی در ذهن داوطلبی را داشته است که ویژگی‌های روابط ترتیبی (مانند ترتیب جزئی که پادتقارن است) را با روابط هم‌ارزی خلط می‌کند.

گزینه ۲) .۴

راه حل تستی:

در نظریه مجموعه‌ها، سه مفهوم «اصل انتخاب»، «لم زرن» و «اصل خوش‌ترتیبی» تثلیث تلایی و معادل یکدیگر را تشکیل می‌دهند. به محض رؤیت نام دو مورد از این مفاهیم در کنار هم، باید بی‌درنگ گزینه حاکی از «هم‌ارزی» و «تبادل» آن‌ها را انتخاب کنید. بنابراین، در کمتر از ۵ ثانیه گزینه ۲ تأیید می‌شود و هر ادعایی مبنی بر قوی‌تر یا ضعیف‌تر بودن (گزینه‌های ۱ و ۴) آن‌ا مردود است.

پاسخ تشریحی:

در چارچوب دستگاه اصول موضوعه زرمولو-فرانکل (ZF)، لم زرن (Zorn's Lemma) و اصل انتخاب (Axiom of Choice) از نظر منطقی کاملاً هم‌ارز (Equivalent) هستند؛ بدین معنا که با فرض گرفتن اصول پایه ZF می‌توان از اصل انتخاب به لم زرن رسید و متقابلاً از لم زرن، اصل انتخاب را استنتاج کرد. از این رو، رابطه بین آن‌ها یک استلزام دوطرفه ($AC \Leftrightarrow ZL$) است. در نظریه مجموعه‌های ZF ، گزاره‌های کلیدی زیر جملگی با یکدیگر هم‌ارز هستند و وجود هر یک، بقیه را نتیجه می‌دهد:

- اصل انتخاب (AC): برای هر خانواده ناتهی از مجموعه‌های ناتهی، یک تابع انتخاب وجود دارد.
- لم زرن (ZL): اگر در یک مجموعه مرتب جزئی ($POSET$)، هر زنجیر دارای کران بالا باشد، آن مجموعه حداقل یک عضو ماکزیمال دارد.
- اصل خوش‌ترتیبی زرمولو (Well-Ordering Theorem): هر مجموعه را می‌توان خوش‌ترتیب کرد.
- اصل ماکزیمال هاوسدورف (Hausdorff Maximal Principle): هر مجموعه مرتب جزئی، دارای یک زیرمجموعه کاملاً مرتب (زنجیر) ماکزیمال است.
- لم توکی (Tukey's Lemma): هر خانواده از مجموعه‌ها که دارای خاصیت کاراکتر متناهی باشد، نسبت به رابطه شمول دارای عضو ماکزیمال است.

راه حل تستی:

گزینه‌های ۱ و ۴ بر مبنای القای شبهه در قدرت اثباتی این قضایا طراحی شده‌اند تا داوطلب ناآشنا با اثبات‌های هم‌ارزی در نظریه مجموعه‌ها را فریب دهند. همچنین، گزینه ۳ یک مغالطه محض است؛ زیرا اهمیت و کارکرد اصلی لم زرن دقیقاً در مجموعه‌های نامتناهی است. در مجموعه‌های متناهی، وجود عضو ماکزیمال امری بدیهی بوده و نیازی به ابزار قدرتمندی چون لم زرن ندارد.



.۵. گزینه (۱)

راه حل تستی:

در مسائل کاردینالیتی دنباله‌ها، به «درجه آزادی» (Degree of Freedom) دقت کنید. کل فضای دنباله‌های حقیقی دارای عدد اصلی $c^{N_0} = c$ است. شرط «حداکثر متناهی صفر»، فقط درایت‌های محدودی را مقید می‌کند و بی‌نهایت جمله دیگر همچنان می‌توانند هر مقدار حقیقی ناصفیری (با کاردینال c) بگیرند. چون بی‌نهایت درایت آزاد داریم، کاردینال نهایی تنزل نکرده و همان c می‌ماند. پاسخ در کمتر از ۱۰ ثانیه قفل می‌شود.

پاسخ تشریحی:

الگوی پایه دنباله‌های حقیقی و ساختار فضای مولد $\mathbb{R}^N$ به عنوان بافتار تثبیت‌شده و مرجع، کاملاً بررسی و ارزیابی می‌گردند. با گذر از توزیع خطی و بسط میانی برای جایگشت‌های جملات صفر در هر اندیس متناهی، مستقیماً به ساختار نهایی و فرمولاسیون قطعی می‌رسیم. ظرفیت اصلی مجموعه D از طریق اعمال عملگر اجتماع شمارا بر فضاهای تابعی نامقید، به صورت $c = N_0 \cdot c^{N_0}$ تثبیت و محاسبه می‌شود.

راه حل تستی:

طراح با معکوس کردن یک مسأله کلاسیک قصد فریب داشته است. اگر شرط مسأله «حداکثر تعداد متناهی از جملات دنباله ناصفر است» بود (و دامنه دنباله را اعداد صحیح یا باینری فرض می‌کردیم)، کاردینال برابر با N_0 می‌شد (مانند چندجمله‌ای‌ها). اما اینجا جملات «صفر» متناهی‌اند، لذا بی‌نهایت جمله دیگر مقادیر پیوسته می‌گیرند و عدد اصلی را در سطح c نگه می‌دارند.

کادرهای جمع بندی

عملیات جبری	نتیجه نهایی	عملیات توان‌دار	نتیجه نهایی
$N_0 + N_0$	N_0	$N_0^{N_0}$	c
$N_0 \cdot N_0$	N_0	c^{N_0}	c
$c + N_0$	c	2^{N_0}	c
$c \cdot c$	c	2^c	2^c (بزرگتر از c)

درسنامه مروری مبانی علوم ریاضی

۱. منطق ریاضی و جبر گزاره‌ها

تسلط بر هم‌ارزی‌های منطقی برای اثبات استلزام‌ها و یافتن مثال‌های نقض، شالوده منطق ریاضی است.

• هم‌ارزی‌های حیاتی:

- تعریف شرطی: $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- عکس نقیض (Contrapositive): $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
- قوانین دمورگان: $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ و $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- نفی استلزام: $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

- تله رایج منطقی: مغالطه وارون ($\sim p \rightarrow \sim q$) و مغالطه عکس ($q \rightarrow p$) را هرگز با عکس نقیض اشتباه نگیرید. استلزام $p \rightarrow q$ هیچ‌کدام از این دو را نتیجه نمی‌دهد.

۲. نظریه مجموعه‌ها و خانواده‌های نمایه‌دار

- در بررسی اشتراک و اجتماع خانواده‌ای از مجموعه‌ها (مانند $\bigcup_r A_r$ و $\bigcap_r A_r$)، رفتار حدی کران‌ها تعیین‌کننده است.
- رفتار اشتراک ($\bigcap$): اشتراک بی‌نهایت مجموعه، تمایل به «نقباض» دارد. اعضای اشتراک می‌مانند که به ازای هر اندیس، درون مجموعه حضور داشته باشند. (اغلب منجر به مجموعه‌های تک‌عضوی یا تهی در کران‌ها می‌شود).
- رفتار اجتماع ($\bigcup$): اجتماع بی‌نهایت مجموعه، تمایل به «انبساط» دارد. عضوی در اجتماع است که حداقل در یک اندیس حضور داشته باشد. (اغلب بازه را به سمت کران‌های حدی بسط می‌دهد).

۳. روابط هم‌ارزی و افرازاها

قضیه اساسی روابط هم‌ارزی، قلب تپنده این بخش است.

- قضیه اساسی: هر رابطه هم‌ارزی (انعکاسی، متقارن و تعدی) روی یک مجموعه ناتهی A ، دقیقاً یک افراز روی A ایجاد می‌کند و برعکس.

• ویژگی‌های افراز:

- (۱) هیچ رده هم‌ارزی تهی نیست ($[a] \neq \emptyset$).
- (۲) رده‌های متمایز، اشتراکشان تهی است (اگر $[a] \neq [b]$ آنگاه $[a] \cap [b] = \emptyset$).
- (۳) اجتماع تمام رده‌ها برابر کل مجموعه است ($\bigcup_{a \in A} [a] = A$).
- مثال نقض طلایی برای تقارن: رابطه شمول ($\subseteq$) و ترتیب جزئی ($\leq$) پادمتقارن هستند، نه متقارن.

۴. تثلیث طلایی نظریه مجموعه‌ها (قضایای هم‌ارز)

در دستگاه اصول موضوعه زرمولو-فرانکل (ZF)، موارد زیر کاملاً با یکدیگر هم‌ارز هستند. حضور هر یک در فرض یک قضیه، استفاده از سایرین را مجاز می‌کند:

- اصل انتخاب (Axiom of Choice): حاصل ضرب دکارتی خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی، ناتهی است (وجود تابع انتخاب).
- لم زرن (Zorn's Lemma): اگر در یک مجموعه مرتب جزئی ($POSET$) هر زنجیر دارای کران بالا باشد، آن مجموعه حداقل یک عضو ماکزیمال دارد. (بیشترین کاربرد: اثبات وجود پایه برای فضاهای برداری و وجود ایده‌آل ماکزیمال در حلقه‌ها).
- اصل خوش‌ترتیبی (Well-ordering Principle): روی هر مجموعه دلخواه می‌توان یک رابطه خوش‌ترتیبی تعریف کرد (هر زیرمجموعه ناتهی، عضو مینیمم داشته باشد).
- اصل ماکزیمال هائوسدورف: هر زنجیر در یک مجموعه مرتب جزئی، در یک زنجیر ماکزیمال محتواس.

۵. حساب کاردینال‌ها (اعداد اصلی)

تحلیل ابعاد بی‌نهایت‌ها و درجه آزادی توابع، شاکله اصلی تست‌های این بخش است. $\aleph$ کاردینال مجموعه‌های شمارا (مانند $\mathbb{N}$) و $\mathfrak{c}$ کاردینال پیوستار (مانند $\mathbb{R}$) است.